

1908.

LIBRARY  
MICHIGAN STATE NORMAL  
COLLEGE

N. 3.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 25. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 330. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT ZWEI TAFELN.



LEIPZIG, 1908.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den  
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in  
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.  
(Ausgegeben am 3. März 1908.)*

# Inhalt.

	Seite
1. Gustav Mie. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen . . . . .	377
2. Reinhold Rüdenberg. Der Empfang elektrischer Wellen in der drahtlosen Telegraphie . . . . .	446
3. P. Ludewig. Über die sogenannten elektrolytischen Stromunterbrecher: (Hierzu Taf. III u. IV.) . . . . .	467
4. M. Thiesen. Eine Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft von 0° . . . . .	506
5. Fritz Reiche. Gesetze der Kompression einer Hohlraumstrahlung durch eine „semipermeable“ Platte. . . . .	521
6. C. Dieterici. Über die innere Verdampfungswärme . . . . .	569
7. K. Schild. Die magnetischen Eigenschaften elektrolytischer Eisenniederschläge . . . . .	586
8. Eduard Riecke. Berichtigung zu dem Aufsatze: „Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geisslerschen Röhren“ . . . . .	623

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.







# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 25.

1. *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell  
kolloidaler Metallösungen;  
von Gustav Mie.*

1. Die mannigfachen Färbungen der Metalle im kolloidalen Zustand haben im Laufe der Zeiten recht verschiedenartige Deutungen erfahren. Früher neigte man sehr zu der Meinung, daß die betreffenden Metalle (besonders das Silber) in mehreren verschieden gefärbten Modifikationen aufträten. Später ist die Meinung aufgekommen, daß die Farben auf optischer Resonanz beruhten. Diese Meinung ist besonders eingehend von F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> begründet worden. Endlich hat neuerdings J. C. Maxwell-Garnett<sup>2)</sup> nachgewiesen, daß sich die Farben von kolloidalen Metallen, wenn die suspendierten Partikelchen des Metalles sehr klein sind, aus der Theorie, die L. Lorenz<sup>3)</sup> für optisch inhomogene Medien entwickelt hat, einwandfrei erklären lassen. Die Theorie ergibt für eine feine Metallsuspension, in denen die Dimensionen der Teilchen im Vergleich zur Wellenlänge und außerdem zu ihren gegenseitigen Entfernungen sehr klein sind, eine ganz bestimmte Absorptionskurve, die sich aus den optischen Konstanten des Metalles vorher berechnen läßt und demnach, obwohl sie durchaus verschieden von der Absorptionskurve des soliden Metalles verläuft, doch gar nichts mit Resonanz in dem Sinne, in dem dieses Wort von Ehrenhaft, Wood u. a. gebraucht wird, zu tun hat. So konnte Maxwell-Garnett unter anderem die rote Farbe vieler Goldlösungen, die Ehrenhaft als Resonanz-

1) F. Ehrenhaft, Wiener Sitzungsber. IIa. 112. p. 181. 1903; 114. p. 1115. 1905.

2) J. C. Maxwell-Garnett, Phil. Trans. 203. p. 385. 1904; 205. p. 237. 1906. Für den Brechungsexponenten von Gelatine-Silberemulsionen wies auch F. Kirchner in seiner Leipziger Dissertation die Gültigkeit der Lorenzschen Formel nach (Ann. d. Phys. 13. p. 239. 1904).

3) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

wirkung auffaßte, aus der Lorenzschen Theorie ungezwungen herleiten. Andere Farben ergibt die Theorie, wenn die Teilchen näher zusammenrücken, und man kann, wie Maxwell-Garnett durch Rechnung nachwies, alle möglichen Übergänge von der Farbe der unendlich verdünnten Metallsuspension bis zu der des soliden Metalles bekommen. So erklären sich auch in sehr einfacher Weise die interessanten Farbumwandlungen, die F. Kirchner und R. Zsigmondy<sup>1)</sup> an eintrocknender Gelatine, die kolloidales Gold enthielt, beobachtet haben.

Indessen paßt diese von Maxwell-Garnett in manchen Fällen so erfolgreich durchgeführte Erklärung der eigentümlichen optischen Eigenschaften kolloidaler Metalle doch in sehr vielen anderen Fällen gar nicht. Man kann auch an *sehr verdünnten* Lösungen eines und desselben Metalles die mannigfachsten Färbungen erhalten, während sie nach der Lorenzschen Theorie stets ein und dieselbe Absorptionskurve zeigen müßten. Nun beruht aber andererseits die von Ehrenhaft vertretene Ansicht über die Resonanz der Teilchen auf der durchaus unzulässigen Annahme, daß man die Metalle auch optisch als vollkommene Leiter ansehen dürfe. Abgesehen von den Einwendungen, die gegen eine solche Annahme vom Standpunkt der Theorie<sup>2)</sup> erhoben werden müssen, wird ihre Unrichtigkeit direkt bewiesen erstens durch die Tatsache, daß Lösungen mit allerkleinsten Metallteilchen nicht vorwiegend violett und blau diffus reflektieren und in der Durchsicht nicht gelbrot aussehen, sondern daß sie sowohl im durchgehenden wie im auffallenden Licht andere für das betreffende Metall charakteristische Farben zeigen, zweitens durch die Tatsache, daß in Lösungen mit sehr feinen Teilchen das diffus zerstreute Licht sein Polarisationsmaximum nicht, wie die von Ehrenhaft vertretene Theorie behauptet, bei  $120^\circ$ , sondern genau wie in Trübungen durch nicht leitende Stoffe bei  $90^\circ$  hat, wo das Licht fast vollkommen polarisiert ist.

Um die Frage definitiv zu entscheiden, ob in den kolloidalen Metallösungen von verschiedener Farbe verschiedene allotrope

1) R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 15. p. 573. 1904.

2) Vgl. die Diskussion zwischen F. Pockels und F. Ehrenhaft in der Physik. Zeitschr. 5. p. 152, 387, 460. 1904.

Modifikationen des Stoffes auftreten, die im kompakten Zustand nicht vorkommen, oder ob man sie durch Teilchen von derselben physikalischen Beschaffenheit, die das kompakte Metall hat, die sich nur in Größe und Form voneinander unterscheiden, erklären kann, ist es unbedingt nötig, sowohl noch mehr experimentelles Material zu schaffen, als auch die Theorie in exakter Form zu entwickeln.

Es sind deswegen im Greifswalder Institut genaue Messungen an verschiedenartigen kolloidalen Goldlösungen von Hrn. Steubing ausgeführt worden. Ich habe über einen kleinen Teil dieser Messungen schon auf der Dresdener Naturforscherversammlung vorläufig berichtet. Die ausführliche Arbeit wird Hr. Steubing in allernächster Zeit veröffentlichen.

Die optische Theorie wird man jedenfalls nach mehreren Richtungen hin entwickeln müssen. Obwohl nämlich die Metalle im allgemeinen regulär kristallisieren, und zwar vorwiegend in Form von Oktaedern, so ist es doch sehr wohl möglich, daß sich bei schnellem Ausscheiden aus der Lösung sehr stark verzerrte Kristalle bilden, die als Blättchen oder Stäbchen in der Flüssigkeit schweben. Andererseits können sich aber auch sicher sehr regelmäßige Kristalle ausbilden, wie man das z. B. in dem sogenannten Avanturinglas an den schönen Kupferoktaedern beobachtet. Die Theorie wird nun für solche ringsum gleichartig ausgebildeten Kristalle, wie regelmäßige Oktaeder, Würfel u. dgl. fürs erste einfach Kugeln substituieren dürfen, ebenso für Blättchen und Stäbchen abgeflachte oder langgestreckte Ellipsoide. Ich möchte dabei aber erwähnen, daß doch von Hrn. Steubing gewisse Beobachtungen über die Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes gemacht sind, auf die ich in 20. noch zurückkommen werde, die den Gedanken nahe legen, daß wir es nicht wirklich mit Kugeln oder ähnlich einfachen Körpern zu tun haben.

*Die im folgenden vorliegende Arbeit beschäftigt sich nur mit dem einfachsten Fall, in welchem man den Teilchen Kugelform zuschreiben darf.*

#### Polarkoordinaten.

2. Wir wollen uns die drei Koordinatenachsen ( $x, y, z$ ) der Einfachheit numeriert denken (1, 2, 3). Das Koordinaten-



system sei ein Rechtssystem. Es sei ferner der Radiusvektor eines Punktes  $(x, y, z)$  mit  $r$  bezeichnet, der Winkel, den  $r$

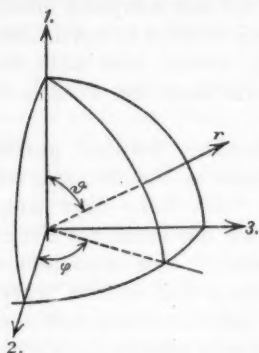


Fig. 1. Koordinatensystem.

mit der Achse 1 bildet, sei  $\vartheta$ , der Winkel der Projektion von  $r$  auf die (2, 3)-Ebene mit der Achse 2 sei  $\varphi$  (Fig. 1). Dann sind also  $(r, \vartheta, \varphi)$  Polarkoordinaten des Punktes. Wir wollen ferner die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Feldintensität in diesem Polarkoordinatensystem bezeichnen mit  $\mathfrak{E}_r, \mathfrak{E}_\vartheta, \mathfrak{E}_\varphi$  und  $\mathfrak{H}_r, \mathfrak{H}_\vartheta, \mathfrak{H}_\varphi$ . Es läßt sich dann leicht zeigen, daß die Maxwell'schen Gleichungen die folgende Form annehmen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 \cdot \sin \vartheta \left( k \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathfrak{E}_r \right) = \frac{\partial (r \cdot \sin \vartheta \cdot \mathfrak{H}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r \cdot \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\ r \cdot \sin \vartheta \cdot \left( k \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}_\vartheta}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathfrak{E}_\vartheta \right) = \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \cdot \sin \vartheta \cdot \mathfrak{H}_\varphi)}{\partial r}, \\ r \cdot \left( k \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathfrak{E}_\varphi \right) = \frac{\partial (r \cdot \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \vartheta}, \\ - r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = \frac{\partial (r \cdot \sin \vartheta \cdot \mathfrak{E}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r \cdot \mathfrak{E}_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\ - r \cdot \sin \vartheta \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \cdot \sin \vartheta \cdot \mathfrak{E}_\varphi)}{\partial r}, \\ - r \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial (r \cdot \mathfrak{E}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

Hier bedeuten  $k, \Lambda, \mu$  Dielektrizität, Leitvermögen, Permeabilität, alle in demselben Maßsystem. In einem nicht leitenden Medium ist  $k \cdot \mu = 1/v^2$ , wenn  $v$  die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in dem Medium ist.

Man könnte nun leicht durch geeignete Eliminationen für  $\mathfrak{E}_r$  und  $\mathfrak{H}_r$  je eine Differentialgleichung zweiter Ordnung aufstellen, die die übrigen Unbekannten nicht mehr enthält. Wir wollen das aber erst ausführen, nachdem wir die Gleichungen speziell für das Problem regelmäßiger Schwingungen umgeformt haben.

Wir setzen dazu:

$$(2) \quad \mathcal{E}_r = E_r \cdot e^{2\pi i n t}, \quad \mathcal{H}_r = H_r \cdot e^{2\pi i n t} \text{ usw.},$$

wo  $E_r$  und  $H_r$  nur noch von den Koordinaten, aber nicht von der Zeit abhängen, und  $n$  die Schwingungszahl in der Sekunde ist. Ferner ist:

$$(3) \quad 4\pi^2 \cdot n^2 \cdot \mu \cdot k - 2\pi i \cdot n \cdot \mu \cdot A = \frac{4\pi^2 \cdot m^2}{\lambda^2}$$

und zwar bedeutet hier  $\lambda$  die Wellenlänge der betreffenden Schwingung im Vakuum, ferner  $m$  den komplexen Brechungsexponenten des Mediums für Licht von der Wellenlänge  $\lambda$ . In einem nicht absorbierenden Medium (z. B. Wasser) ist  $m$  identisch mit dem gewöhnlichen Brechungsexponenten, in Metallen dagegen ist  $m = \nu \cdot (1 - i \cdot \kappa)$ , wo  $\nu$  die gewöhnlich als Brechungsexponent bezeichnete reelle Größe und  $\kappa$  den Absorptionskoeffizienten bedeuten.

Endlich wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen:

$$(4) \quad -\frac{i \cdot n \cdot \mu \cdot \lambda}{m} \cdot H_r = M_r \text{ usw.},$$

$$(5) \quad \frac{2\pi m r}{\lambda} = x.$$

Wir bekommen dann die folgenden Gleichungen, in welchen die Größen  $E$  und  $M$  in ganz gleicher Weise eintreten:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 \cdot \sin \vartheta \cdot E_r = \frac{\partial (x \cdot \sin \vartheta \cdot M_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (x \cdot M_\varphi)}{\partial \varphi}, \\ x \cdot \sin \vartheta \cdot E_\varphi = \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (x \sin \vartheta \cdot M_\varphi)}{\partial x}, \\ x \cdot E_\varphi = \frac{\partial (x \cdot M_\varphi)}{\partial x} - \frac{\partial M_r}{\partial \vartheta}, \\ x^2 \cdot \sin \vartheta \cdot M_r = \frac{\partial (x \sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (x E_\varphi)}{\partial \varphi}, \\ x \cdot \sin \vartheta \cdot M_\varphi = \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (x \cdot \sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial x}, \\ x \cdot M_\varphi = \frac{\partial (x \cdot E_\varphi)}{\partial x} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

Wir denken uns nun ein kugelförmiges Partikelchen vom Radius  $\rho$ , dessen Zentrum mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt, außen ist das Lösungsmittel (z. B. Wasser). Wir wollen die Feldgrößen in der Kugel und im Lösungsmittel

durch die Suffixe  $i$  und  $a$  unterscheiden, die beiden Brechungs-exponenten seien  $m$  und  $m_0$ . Von der Permeabilität wollen wir annehmen, daß sie innen und außen gleich sei:  $\mu_i = \mu_a$ . Die Variable  $x$  macht an der Kugeloberfläche einen Sprung, da

$$x_i = \frac{2\pi m}{\lambda} \cdot r, \quad x_a = \frac{2\pi m_0}{\lambda} r = \frac{2\pi}{\lambda'} \cdot r,$$

wenn  $\lambda'$  die Wellenlänge in dem Lösungsmittel bedeutet. An der Kugeloberfläche müssen die folgenden Grenzbedingungen erfüllt sein:

$$(7) \quad \begin{cases} E_{\phi a} = E_{\phi i}, & E_{\varphi a} = E_{\varphi i}, \\ (x \cdot M_{\phi})_a = (x \cdot M_{\phi})_i, & (x \cdot M_{\varphi})_a = (x \cdot M_{\varphi})_i. \end{cases}$$

#### Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen.

3. Um die Gleichungen (6) zu lösen, hat man einfach die von Lord Rayleigh in „Theory of Sound“ entwickelten Methoden anzuwenden. Es ist das beispielsweise schon von Fr. Hasenöhrl<sup>1)</sup> für andere Zwecke einmal ausgeführt. Ich gebe im folgenden aufs neue eine kurze Herleitung der Integrale, um möglichst übersichtlich alle zur Diskussion zu benutzenden Formeln zusammenstellen zu können.

Wie schon oben erwähnt, läßt sich durch geeignete Eliminationen aus den Gleichungen (6) für  $E_r$  und  $M_r$  je eine Gleichung zweiter Ordnung aufstellen:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 (x^2 E_r)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right) \\ \quad + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + x^2 E_r = 0, \\ \frac{\partial^2 (x^2 M_r)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial M_r}{\partial \vartheta} \right) \\ \quad + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 M_r}{\partial \varphi^2} + x^2 M_r = 0. \end{cases}$$

Wir können jetzt alle Lösungen des Gleichungssystems (6) in drei Gruppen sondern. Die erste Gruppe stellt die Wellen dar, die durch elektrische Schwingungen der Kugel entstehen, sie ist charakterisiert durch:

$$E_r \neq 0, \quad M_r = 0.$$

1) Fr. Hasenöhrl, Wiener Ber. IIa. 111. p. 1229. 1902.

Die zweite Gruppe stellt die Wellen dar, die durch magnetische Schwingungen der Kugel entstehen. Für sie ist:

$$E_r = 0, \quad M_r \neq 0.$$

Die dritte Gruppe enthält alle Integrale der Maxwell'schen Gleichungen, die regelmäßig periodische Schwingungen darstellen. Man kann sie erhalten, indem man Integrale der Gruppe I mit Integralen der Gruppe II addiert.

Vorausgesetzt, wir hätten eine Lösung der Differentialgleichung für  $E_r$  gefunden, dann erhält man die übrigen Komponenten, die dem Fall der Gruppe I entsprechen, sehr einfach durch das folgende Verfahren: Man setzt in der zweiten und dritten Gleichung des Systems (6)  $M_r = 0$  ein, und substituiert dann für  $M_\varphi$  und  $M_\theta$  die Werte aus der fünften und sechsten Gleichung. Man hat dann sofort die Gleichungen, die zur Berechnung von  $E_\theta$  und  $E_\varphi$  aus dem bekannten  $E_r$  dienen müssen. Hat man nun  $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $E_\varphi$ , so findet man natürlich  $M_\theta$  und  $M_\varphi$  aus den beiden letzten Gleichungen des Systems (6). Es ergibt sich so das folgende Formelsystem:

$$(9) \quad \begin{cases} E_r, & M_r = 0, \\ \frac{\partial^2 (x \cdot E_\theta)}{\partial x^2} + x \cdot E_\theta = \frac{\partial^2 E_r}{\partial \vartheta \partial x}, & \frac{\partial (x \cdot M_\theta)}{\partial x} = x \cdot E_\varphi, \\ \frac{\partial^2 (x \cdot \sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial x^2} + x \sin \vartheta \cdot E_\varphi = \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi \partial x}, & \frac{\partial (x \cdot M_\varphi)}{\partial x} = -x \cdot E_\theta. \end{cases}$$

Ganz analog wird die Rechnung für Gruppe II. Ferner kann man  $E_r$  allgemein berechnen als eine Summe von Gliedern, deren jedes Gleichung (8) einzeln erfüllt und ein Produkt aus einer Funktion von  $x$  mit einer Funktion der Winkel  $\vartheta$ ,  $\varphi$  ist. Das  $v^{\text{te}}$  Glied sei:

$$E_r^{(v)} = \frac{K_v(x)}{x^2} \cdot P_v(\vartheta, \varphi).$$

Dann müssen  $K_v$  und  $P_v$  die folgenden beiden Gleichungen erfüllen:

$$(10) \quad \frac{d^2 K_v}{dx^2} + \left(1 - \frac{c_v}{x^2}\right) K_v = 0,$$

$$(11) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \sin \vartheta \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 P_v}{\partial \varphi^2} + c_v \cdot P_v = 0,$$

wo  $c_v$  irgend eine reelle oder komplexe Zahl sein könnte. Wir wollen nur solche Funktionen  $K_v$  und  $P_v$  benutzen, für die

$$(12) \quad c_v = v \cdot (v + 1).$$

Es ist dann  $P_\nu$  eine Kugelfunktion der beiden Variablen  $\vartheta, \varphi$  von der ganzzahligen Ordnung  $\nu$ ,  $K_\nu$  ist eine mit den Zylinderfunktionen mit gebrochenem Index (Nenner 2) nahe verwandte Funktion. Die Gleichungen (9) ergeben nun die folgende Lösung der Maxwell'schen Gleichungen:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} E_r^{(\nu)} &= \frac{K_\nu(x)}{x^3} \cdot P_\nu(\vartheta, \varphi), \\ E_\vartheta^{(\nu)} &= \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu'(x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta}, \\ E_\varphi^{(\nu)} &= \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu'(x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi}, \\ M_r^{(\nu)} &= 0, \\ M_\vartheta^{(\nu)} &= \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi}, \\ M_\varphi^{(\nu)} &= -\frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \right.$$

Damit haben wir die Lösungen der ersten Gruppe ( $M_r=0$ ) gefunden. Wir können nun aber wegen der Symmetrie der Differentialgleichungen (6) in bezug auf die  $E$  und  $M$  ohne weiteres auch die Lösungen der Gruppe II ( $E_r=0$ ) hinschreiben, nämlich:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} E_r^{(\nu)} &= 0, \\ E_\vartheta^{(\nu)} &= \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi^{(\nu)} &= -\frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta}, \\ M_r^{(\nu)} &= \frac{K_\nu(x)}{x^3} \cdot \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi), \\ M_\vartheta^{(\nu)} &= \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu'(x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta}, \\ M_\varphi^{(\nu)} &= \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu'(x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right.$$

wo  $K_\nu$  und  $\mathfrak{P}_\nu$  irgendwelche Lösungen der Gleichungen (10) und (11) sind, in denen  $c_\nu = \nu \cdot (\nu + 1)$  zu setzen ist.

Alles kommt nun darauf an, ein ebene Welle, nämlich die auf das kugelförmige Partikelchen auftreffende Welle mit Hilfe von (13) und (14) auszudrücken. Dazu müssen wir aber zunächst die wichtigsten Eigenschaften der dabei zu verwendenden Lösungen von (10) und (11) kennen.



Die Funktionen  $K_\nu$  und  $I_\nu$ .

## 4. Die Differentialgleichung (10)

$$\frac{d^2 K_\nu}{dx^2} + \left(1 - \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{x^2}\right) \cdot K_\nu = 0$$

läßt sich für den Fall  $\nu = 0$  sofort lösen. Zwei partikuläre Integrale sind:

$$\begin{aligned} K_0(x) &= e^{ix}, \\ K_0(-x) &= e^{-ix}. \end{aligned}$$

Kennt man ferner eine Lösung der Gleichung von der Ordnungszahl  $\nu$ ,  $K_\nu$ , so kann man durch Einsetzen leicht beweisen, daß eine Lösung  $K_{\nu+1}$  der Gleichung von der Ordnungszahl  $(\nu + 1)$  folgendermaßen berechnet werden kann:

$$(15) \quad K_{\nu+1}(x) = i \cdot \left( (\nu + 1) \cdot \frac{K_\nu}{x} - \frac{dK_\nu}{dx} \right).$$

Diese Rekursionsformel liefert, wenn man  $K_0(x) = e^{ix}$  wählt:

$$(16) \quad K_\nu(x) = e^{ix} \cdot \sum_0^\nu \frac{(\nu + \mu)!}{\mu! (\nu - \mu)!} \cdot \frac{i^\mu}{2^\mu \cdot x^\mu}.$$

Aus (15) findet man, wenn man einmal differenziert, darauf  $dK_\nu/dx$  und mit Hilfe von (10) auch noch  $d^2 K_\nu/dx^2$  eliminiert:

$$(17) \quad K_{\nu-1}(x) = -i \cdot \left( \nu \cdot \frac{K_\nu}{x} + \frac{dK_\nu}{dx} \right).$$

Ferner erhält man aus (15) und (17) folgende oft zu brauchenden Relationen:

$$(18) \quad \begin{cases} (2\nu + 1) \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} = i \cdot K_{\nu-1} + \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1} \\ (2\nu + 1) \cdot \frac{dK_\nu}{dx} = (\nu + 1) \cdot i \cdot K_{\nu-1} - \nu \cdot \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1}. \end{cases}$$

Eine zweite partikuläre Lösung von (10) bekommt man ohne weiteres, da in (10) nur die zweite Potenz von  $x$  bzw.  $dx$  vorkommt, wenn man in der ersten Lösung das Vorzeichen umkehrt  $K_\nu(-x)$ . Die allgemeine Lösung ist also:

$$A \cdot K_\nu(x) + B \cdot K_\nu(-x).$$

Da wir im folgenden gerade die Lösung  $K_\nu(-x)$  brauchen werden, so wird es gut sein, die Relationen noch einmal hin-

zuschreiben, die man bekommt, wenn man in (15), (16), (17), (18) das Vorzeichen von  $x$  umkehrt:

$$(19) \quad K_\nu(-x) = e^{-ix} \cdot \sum_0^\nu \frac{(\nu + \mu)!}{\mu! (\nu - \mu)!} \cdot \frac{(-i)^\mu}{2^\mu \cdot x^\mu},$$

$$(20) \quad \begin{cases} K_{\nu+1}(-x) = -i \cdot \left( (\nu + 1) \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} - K'_\nu(-x) \right), \\ K_{\nu-1}(-x) = +i \cdot \left( \nu \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} + K'_\nu(-x) \right). \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} -(2\nu + 1) \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} = i \cdot K_{\nu-1}(-x) + \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1}(-x), \\ -(2\nu + 1) \cdot K'_\nu(-x) = i \cdot (\nu + 1) \cdot K_{\nu-1}(-x) - \frac{\nu}{i} \cdot K_{\nu+1}(-x). \end{cases}$$

5. Wenn man in den Ausdrücken (16) und (19)  $e^{ix}$  und  $e^{-ix}$  in Potenzreihen entwickelt und darauf ausmultipliziert und nach Potenzen von  $x$  ordnet, so bekommt man die Potenzreihenentwickelungen für  $K_\nu(x)$  und  $K_\nu(-x)$ , die natürlich eine endliche Anzahl von Potenzen mit negativen, ganzen Exponenten enthalten. Man bekommt nämlich:

$$K_\nu(x) = \sum_{r=-\nu}^{r=+\infty} i^r \cdot x^r \cdot \sum_0^\nu \frac{(\nu + \mu)! (-1)^\mu}{(\mu + r)! \mu! (\nu - \mu)! 2^\mu}.$$

Nun läßt sich aber zeigen, daß:

$$\sum_0^\nu \frac{(-1)^\mu \cdot (\nu + \mu)!}{2^\mu \cdot (\mu + r)! \mu! (\nu - \mu)!} = \frac{(r - \nu + 1) \cdot (r - \nu + 3) \cdot \dots \cdot (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!}.$$

Dieser Ausdruck ist dadurch bemerkenswert, daß er bis zu  $r = \nu$  hin immer abwechselnd von Null verschieden und gleich Null ist. Bis zur Potenz  $x^\nu$  hin bleiben also in der Reihe nur Glieder von der Form  $x^{-\nu+2\mu}$  stehen. Setzen wir in den Koeffizienten  $r = -\nu + 2\mu$  ein, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} & \frac{(r - \nu + 1) \cdot (r - \nu + 3) \cdot \dots \cdot (r + \nu - 1)}{(r + \mu)!} \\ &= (-1)^{\nu + \mu + 1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\nu - 2\mu - 1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\mu - 1)}{(2\mu)!}. \end{aligned}$$

Also:

$$(22) \left\{ \begin{aligned} K_\nu(x) &= -i^\nu \cdot \sum_0^\nu \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu - 2\mu - 1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu - 1)}{(2\mu)!} \cdot x^{-\nu + 2\mu} \\ &+ \sum_{r=\nu+1}^{r=+\infty} \frac{(r - \nu + 1)(r - \nu + 3) \dots (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!} \cdot i^r \cdot x^r. \end{aligned} \right.$$

Ebenso:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} K_\nu(-x) &= -(-i)^\nu \cdot \sum_0^\nu \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu - 2\mu - 1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu - 1)}{(2\mu)!} \cdot x^{-\nu + 2\mu} \\ &+ \sum_{r=\nu+1}^{r=+\infty} \frac{(r - \nu + 1)(r - \nu + 3) \dots (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!} \cdot (-i)^r \cdot x^r. \end{aligned} \right.$$

Man sieht hieraus, daß die Differentialgleichung (10) auch eine Lösung hat, die um den Nullpunkt herum in eine Potenzreihe ohne negative Potenzen zu entwickeln ist. Wir wollen sie mit dem Buchstaben  $I_\nu$  bezeichnen, und setzen:

$$(24) \quad I_\nu(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left( \frac{K_\nu(x)}{i^\nu} - \frac{K_\nu(-x)}{(-i)^\nu} \right).$$

Die Potenzreihe für  $I_\nu$  hat lauter reelle Koeffizienten, sie lautet:

$$(25) \quad I_\nu(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\mu \cdot x^{\nu + 2\mu + 1}}{(2\mu + 1)!(2\mu + 3)(2\mu + 5) \dots (2\mu + 2\nu + 1)}.$$

Aus (18) und (19) ergeben sich zwei wichtige Relationen:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} (2\nu + 1) \cdot \frac{I_\nu}{x} &= I_{\nu-1} + I_{\nu+1}, \\ (2\nu + 1) \cdot \frac{dI_\nu}{dx} &= (\nu + 1) \cdot I_{\nu-1} - \nu \cdot I_{\nu+1}. \end{aligned} \right.$$

6. Zur Berechnung der Funktionen  $K_\nu(-x)$ ,  $I_\nu(x)$  und ihrer ersten Ableitungen (die in den Schlußformeln allein vorkommen) werden wir am besten folgende Ausdrücke brauchen:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} K_1(-x) &= -\frac{i}{x} \cdot e^{-ix} \cdot (1+ix), \\ K_2(-x) &= -\frac{3}{x^3} \cdot e^{-ix} \cdot \left( \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right) + ix \right), \\ K_3(-x) &= +\frac{15 \cdot i}{x^5} \cdot e^{-ix} \cdot \left( \left(1 - \frac{2}{5}x^2\right) + ix \cdot \left(1 - \frac{1}{15}x^2\right) \right), \\ &\dots \dots \dots \\ K_\nu(-x) &= (-i)^\nu \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{x^\nu} \cdot e^{-ix} \\ &\cdot \left\{ \left( 1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(-1)}{2}} \frac{(\nu-\sigma)_\sigma (-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3) \dots (2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \dots (2\sigma-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + ix \cdot \left( 1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(+1)}{2}-1} \frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma (-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3) \dots (2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \dots (2\sigma+1)} \right) \right\}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} K'_1(-x) &= +\frac{i}{x^3} \cdot e^{-ix} \cdot ((1-x^2) + ix), \\ K'_2(-x) &= +\frac{6}{x^5} \cdot e^{-ix} \cdot \left( \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + ix \cdot \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right) \right), \\ K'_3(-x) &= -\frac{45 \cdot i}{x^7} \cdot e^{-ix} \cdot \left( \left(1 - \frac{7}{15}x^2 + \frac{1}{45}x^4\right) + ix \cdot \left(1 - \frac{2}{15}x^2\right) \right), \\ &\dots \dots \dots \\ K'_\nu(-x) &= -(-i)^\nu \cdot \nu \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{x^{\nu+1}} \cdot e^{-ix} \\ &\cdot \left\{ \left( 1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(+1)}{2}} (-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma)_\sigma + \frac{2\sigma-1}{\nu} \cdot (\nu-\sigma)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3) \dots (2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \dots (2\sigma-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + ix \cdot \left( 1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(-1)}{2}} (-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma + \frac{2\sigma+1}{\nu} \cdot (\nu-\sigma-1)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3) \dots (2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \dots (2\sigma+1)} \right) \right\}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} I_1(x) &= \frac{x^3}{3} \cdot \left( 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{3}{7} \cdot \frac{x^5}{5!} - \frac{3}{9} \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \right), \\ I_2(x) &= \frac{x^3}{15} \cdot \left( 1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 9} \cdot \frac{x^5}{5!} - \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \right), \\ I_3(x) &= \frac{x^4}{105} \cdot \left( 1 - \frac{3}{9} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ &\dots \dots \dots \\ I_\nu(x) &= \frac{x^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2\nu+3} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{(2\nu+3)(2\nu+5)} \cdot \frac{x^5}{5!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{(2\nu+3)(2\nu+5)(2\nu+7)} \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \right). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

$$(30) \left\{ \begin{aligned} I_1'(x) &= \frac{2 \cdot x}{3} \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2}{3!} + 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{x^4}{5!} - 4 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ I_2'(x) &= \frac{3 \cdot x^2}{15} \cdot \left( 1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{5}{9} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{5}{11} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ I_3'(x) &= \frac{4 \cdot x^3}{104} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^4}{5!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ &\dots \dots \dots \\ I_\nu'(x) &= \frac{(\nu+1) \cdot x^\nu}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot \left( 1 - \frac{\nu+3}{\nu+1} \cdot \frac{3}{2\nu+3} \cdot \frac{x^2}{3!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu+5}{\nu+1} \cdot \frac{3 \cdot 5}{(2\nu+1)(2\nu+5)} \cdot \frac{x^4}{5!} - \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Diese Reihen sind für Zahlenrechnungen meistens weit bequemer als die endlichen Ausdrücke, die man nach (24) für  $I_\nu$  und  $I_\nu'$  bekommt. Für andere Zwecke muß man aber auch diese kennen:

$$(29a) \left\{ \begin{aligned} I_1(x) &= -\cos x + \frac{\sin x}{x}, \\ I_2(x) &= -\sin x - \frac{3 \cdot \cos x}{x} + \frac{3 \cdot \sin x}{x^2}, \\ I_3(x) &= +\cos x - \frac{6 \cdot \sin x}{x} - \frac{15 \cdot \cos x}{x^2} + \frac{15 \cdot \sin x}{x^3}, \\ &\dots \dots \dots \\ I_\nu(x) &= \sin \left( x - \frac{\nu \pi}{2} \right) + \sum_1^\nu \sin \left( x - \frac{(\nu-r)\pi}{2} \right) \\ &\quad \cdot \frac{(\nu+r)!}{(\nu-r)! r!} \cdot \frac{1}{2^r \cdot x^r}. \end{aligned} \right.$$

$$(30a) \left\{ \begin{aligned} I_1'(x) &= +\sin x + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \\ I_2'(x) &= -\cos x + \frac{3 \cdot \sin x}{x} + \frac{6 \cdot \cos x}{x^2} - \frac{6 \cdot \sin x}{x^3}, \\ I_3'(x) &= -\sin x - \frac{6 \cdot \cos x}{x} + \frac{21 \cdot \sin x}{x^2} + \frac{45 \cdot \cos x}{x^3} - \frac{45 \cdot \sin x}{x^4}, \\ &\dots \dots \dots \\ I_\nu'(x) &= \cos \left( x - \frac{\nu \cdot \pi}{2} \right) + \sum_1^{\nu+1} \cos \left( x - \frac{(\nu-r)\pi}{2} \right) \\ &\quad \cdot \frac{(\nu+r-1)!}{(\nu-r+1)! r!} \cdot \frac{(\nu(\nu+1) + r(r-1))}{2^r \cdot x^r}. \end{aligned} \right.$$



## Die Kugelfunktionen.

7. Für das vorliegende Problem sind die gewöhnlichen Kugelfunktionen, die nur von einer Variablen abhängen (die zonalen Kugelfunktionen) nicht zu verwenden. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß Funktionen von den folgenden beiden Formen zur Lösung nötig sind:

$$(31) \quad P_v(\vartheta, \varphi) = \Pi_v(v) \cdot \cos \vartheta,$$

$$(32) \quad \mathfrak{P}_v(\vartheta, \varphi) = \Pi_v(v) \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi,$$

$$(33) \quad v = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi.$$

Die Funktion  $\Pi_v$  muß, wie man durch Substitution der Ausdrücke für  $P_v$  und  $\mathfrak{P}_v$  in (11) erkennt, folgender Differentialgleichung gehorchen:

$$(34) \quad \frac{d^2}{dv^2} ((1 - v^2) \cdot \Pi_v) + v \cdot (v + 1) \cdot \Pi_v = 0.$$

Die geometrische Bedeutung der drei in (31), (32), (33) vorkommenden Winkelfunktionen:

$$\cos \vartheta, \quad \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$$

ist wohl ohne weiteres klar. Nennen wir die Winkel, die der Radiusvektor des betrachteten Punktes mit den Achsen 1, 2, 3 bildet (vgl. 2.),  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ , so ist, wie man aus Fig. 2 sofort sehen kann:

$$(35) \quad \begin{cases} \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta, \\ \cos \vartheta_2 = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \cos \vartheta_3 = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi = v. \end{cases}$$

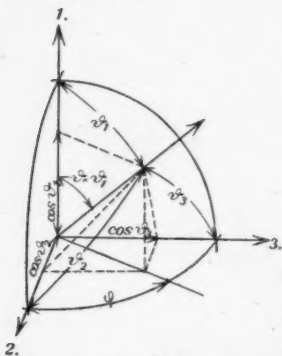


Fig. 2.  
Trigonometrische Beziehungen.

Nur diese Lösung interessiert uns. Haben wir sie für eine Ordnungszahl (z. B.  $v = 1$ ) gefunden, so können wir sie für alle anderen Ordnungszahlen mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel berechnen:

$$(36) \quad \frac{d \Pi_{v+1}}{dv} = v \cdot \frac{d \Pi_v}{dv} + (v + 2) \cdot \Pi_v.$$

Diese Formel kann man durch Einsetzen in (34) ohne weiteres verifizieren. Eine Lösung von (34) für den Fall  $\nu = 1$  ist nun:

$$(37) \quad \Pi_1(\nu) = 1.$$

Daraus ergibt sich durch Anwendung von (36):

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_0(\nu) = 0, \quad \Pi_1(\nu) = 1, \\ \Pi_2 = 3\nu, \\ \Pi_3 = \frac{15}{2} \cdot \nu^2 - \frac{3}{2}, \\ \Pi_4 = \frac{35}{2} \nu^3 - \frac{15}{2} \nu, \\ \Pi_\nu = \frac{1}{2^\nu} \cdot \sum_0^{\frac{\nu(+1)}{2} - 1} (-1)^s \cdot \frac{(2\nu - 2s)!}{(\nu - s)! s!} \cdot \frac{\nu^{\nu - 2s - 1}}{(\nu - 2s - 1)!}. \end{array} \right.$$

Eine andere Reihenentwicklung für  $\Pi_\nu$  ist die folgende:

$$(39) \quad \Pi_\nu = \sum_0^{\frac{\nu(+1)}{2} - 1} (-1)^s \cdot \frac{(\nu + 1)!}{s!(s + 1)!} \cdot \frac{\nu^{\nu - 2s - 1} \cdot (1 - \nu^2)^s}{(\nu - 2s - 1)! 2^{2s + 1}}.$$

Für den speziellen Wert  $\nu = 0$  ergibt (38):

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_\nu(0) = 0, \quad \text{wenn } \nu \text{ eine gerade Zahl ist,} \\ \Pi_\nu(0) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot \frac{(\nu+1)!}{2^{\nu} \left(\frac{\nu+1}{2}\right)! \left(\frac{\nu-1}{2}\right)!}, \quad \text{wenn } \nu \text{ ungerade ist,} \end{array} \right.$$

und für die erste Ableitung:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\Pi_\nu}{d\nu}\right)_{\nu=0} = (-1)^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \frac{(\nu+1)!}{2^{\nu-1} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \left(\frac{\nu}{2}-1\right)!}, \quad \text{wenn } \nu \text{ gerade,} \\ \left(\frac{d\Pi_\nu}{d\nu}\right)_{\nu=0} = 0, \quad \text{wenn } \nu \text{ ungerade.} \end{array} \right.$$

Ähnlich kann man aus (39) die Werte der Funktion  $\Pi_\nu$  und ihrer Ableitungen für  $\nu = 1$  berechnen.

8. Gerade so, wie es bei den oben besprochenen Funktionen  $K_\nu$  und  $I_\nu$  war, gibt es auch für die  $\Pi_\nu$  außer der Rekursionsformel (36) noch eine zweite Relation, die sich ähnlich wie (36) beweisen läßt:

$$(42) \quad \frac{d\Pi_{\nu-1}}{d\nu} = \nu \cdot \frac{d\Pi_\nu}{d\nu} - (\nu - 1) \cdot \Pi_\nu.$$

Aus (36) und (42) folgen die beiden oft sehr nützlichen Formeln:

$$(43) \quad \begin{cases} (2\nu + 1) \cdot \Pi_\nu = \frac{d \Pi_{\nu+1}}{d\nu} - \frac{d \Pi_{\nu-1}}{d\nu}, \\ (2\nu + 1) \cdot \nu \cdot \Pi_\nu = \nu \cdot \Pi_{\nu+1} + (\nu + 1) \cdot \Pi_{\nu-1}. \end{cases}$$

9. Endlich seien auch noch die in den Formeln (13) und (14) vorkommenden Differentialquotienten von  $P_\nu$  und  $\mathfrak{P}_\nu$  hier notiert.

$$(44) \quad \begin{cases} P_\nu = \Pi_\nu \cdot \cos \vartheta, \\ \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} = - \frac{d(\nu \cdot \Pi_\nu)}{d\nu} \cdot \sin \vartheta + \frac{d \Pi_\nu}{d\nu} \cdot \sin \varphi, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} = \frac{d \Pi_\nu}{d\nu} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

$$(45) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_\nu = \Pi_\nu \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} = \frac{d(\nu \cdot \Pi_\nu)}{d\nu} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} = - \frac{d(\nu \cdot \Pi_\nu)}{d\nu} \cdot \sin \varphi + \frac{d \Pi_\nu}{d\nu} \cdot \sin \vartheta. \end{cases}$$

Speziell für die ersten beiden Ordnungszahlen haben wir:

$$\begin{aligned} P_1 &= \cos \vartheta, & P_2 &= 3 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ \frac{\partial P_1}{\partial \vartheta} &= -\sin \vartheta, & \frac{\partial P_2}{\partial \vartheta} &= 3 \cdot \cos 2 \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} &= 3 \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \mathfrak{P}_1 &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, & \mathfrak{P}_2 &= 3 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial \vartheta} &= \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, & \frac{\partial \mathfrak{P}_2}{\partial \vartheta} &= 3 \cdot \sin 2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial \varphi} &= -\sin \varphi, & \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_2}{\partial \varphi} &= 3 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos 2 \varphi. \end{aligned}$$

#### Integralwerte der Kugelfunktionen.

10. Im folgenden wird die Aufgabe gelöst werden müssen, die gesamte Strahlung, die von der Kugel reflektiert wird, zu berechnen. Wir werden sehen, daß diese Aufgabe darauf hinauskommt, die Oberflächenintegrale

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_\nu \cdot P_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu \cdot \mathfrak{P}_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

zu finden. Man kann diese Integrale sehr leicht beispiels-

weise nach einer in Maxwells Treatise on Electricity<sup>1)</sup> angegebenen Methode ausrechnen. Es ergibt sich:

$$(46) \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_\nu \cdot P_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu \cdot \mathfrak{P}_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = 0, \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_\nu^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = 2\pi \cdot \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2\nu + 1}. \end{aligned} \right.$$

#### Ebene Welle.

11. Das vorliegende Problem ist als gelöst zu betrachten, sobald es gelingt, die ebene Welle, die auf die Kugel auftritt, in Ausdrücke von der Form (13) und (14) zu zerlegen.

Als Fortschreitungsrichtung der ebenen Welle wollen wir die Achse 3, und zwar im negativen Sinne wählen. Das Licht sei geradlinig polarisiert, und zwar sei Achse 1 die Richtung der elektrischen Schwingung, also Achse 2 die der magnetischen.

Nennen wir die Koordinate eines Punktes in der Richtung der Achse 3 vorübergehend wieder  $z$ , so ist nach (35):

$$z = r \cdot \cos \vartheta_3 = r \cdot v.$$

Die ebene Welle wird also durch folgende Größen repräsentiert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= e^{2\pi i n t + \frac{2\pi i z}{\lambda'}}, \quad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_3 = 0, \\ \mathfrak{S}_1 &= 0, \quad \mathfrak{S}_2 = -\sqrt{\frac{k}{\mu}} \cdot e^{2\pi i n t + \frac{2\pi i z}{\lambda'}}, \quad \mathfrak{S}_3 = 0. \end{aligned}$$

Hier sind  $k$  und  $\mu$  Dielektrizität und Permeabilität in dem in (1) gebrauchten Sinn, das Leitvermögen des von dem Strahl durchlaufenen Mediums (des Wassers) haben wir als Null angenommen,  $\lambda'$  ist die Wellenlänge in dem Medium (Wasser). Setzt man nun (vgl. (5))

$$\frac{2\pi i z}{\lambda'} = \frac{2\pi i \cdot r \cdot v}{\lambda'} = i \cdot x \cdot v,$$

so kann man ohne weiteres die Größen  $E_r, \dots$  und  $M_r, \dots$  die früher (Formel (2) und (4)) eingeführt wurden, hinschreiben:

$$(47) \left\{ \begin{aligned} E_r &= e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \cos \vartheta, & M_r &= i \cdot e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ E_\vartheta &= -e^{i \cdot v \cdot x} \cdot \sin \vartheta, & M_\vartheta &= i \cdot e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ E_\varphi &= 0, & M_\varphi &= -i \cdot e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

1) Bd. I p. 200 der deutschen Übersetzung.

Nun kann man aber die hier vorkommende Exponentialfunktion leicht nach  $I$ - und  $II$ -Funktionen entwickeln. Es ist nämlich:

$$(48) \quad e^{ixv} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}(x)}{x^2} \cdot II_{\nu}(v).$$

Man kann die Richtigkeit dieser Formel am leichtesten durch Differenzieren nach  $x$  und nach  $v$  beweisen. Es ist nämlich, wenn wir die Reihe zunächst einmal  $f(x, v)$  nennen, nach (26) und (43):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \cdot \left\{ \sum_1^{\infty} i^{\nu-1} \cdot (2\nu+1) \cdot \left( \frac{dI_{\nu}}{dx} - 2 \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \right) \cdot II_{\nu}(v) \right\}, \\ &= \frac{i}{x^2} \cdot \sum_1^{\infty} \nu \cdot ((\nu-1) \cdot i^{\nu-2} \cdot I_{\nu-1} + (\nu+2) \cdot i^{\nu} \cdot I_{\nu+1}) \cdot II_{\nu}(v), \\ &= i \cdot \sum_1^{\infty} i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot (\nu \cdot II_{\nu+1} + (\nu+1) \cdot II_{\nu-1}), \\ &= i \cdot v \cdot \sum_1^{\infty} (2\nu+1) i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot II_{\nu}(v), \\ &= i \cdot v \cdot f(x, v). \end{aligned}$$

Ebenso kann man zeigen, daß:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = i \cdot x \cdot f(x, v).$$

Endlich ist:

$$(f(x, v))_{x=0} = 1.$$

Also

$$f(x, v) = e^{ixv}.$$

Demnach haben wir für  $E_r$  und  $M_r$  die gesuchte Reihenentwicklung:

$$E_r = \sum_1^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu},$$

$$M_r = \sum_1^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_{\nu},$$

wo  $P_{\nu}$  und  $\mathfrak{P}_{\nu}$  die in (31) und (32) definierten Funktionen sind.



Man kann nun von dem gefundenen Wert  $E_r$  ausgehend, mit Hilfe der Formeln (13) eine Lösung der Gruppe I bilden, ferner von  $M_r$  ausgehend unter Benutzung von (14) eine Lösung der Gruppe II, die Summe dieser beiden Lösungen muß dann dasjenige Integral der Maxwell'schen Gleichungen sein, das die ebene Welle wiedergibt. Man kann sich leicht durch direkte Rechnung überzeugen, daß die so erhaltenen Reihenentwickelungen in der Tat identisch sind mit den Ausdrücken (47).

Man kann nämlich aus den Relationen (26) und (43), wenn man dazu noch die Differentialgleichung (10)

$$\frac{1}{v \cdot (v+1)} \cdot \left( \frac{d^2 I_v}{dx^2} + I_v \right) = \frac{I_v}{x^2}$$

beachtet, die folgenden beiden Gleichungen ableiten:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^{\infty} \frac{2v+1}{v \cdot (v+1)} \left( i^{v-1} \cdot I_v \cdot \frac{d(v \cdot II_v)}{dv} + i^v \cdot \frac{dI_v}{dx} \cdot \frac{dII_v}{dv} \right) = 0, \\ & \sum_1^{\infty} \frac{2v+1}{v \cdot (v+1)} \cdot \left( i^{v-1} \cdot I_v \cdot \frac{dII_v}{dv} + i^v \cdot \frac{dI_v}{dx} \cdot \frac{d(v \cdot II_v)}{dv} \right) \\ & \quad = \sum_1^{\infty} (2v+1) \cdot i^{v-1} \cdot \frac{I_v}{x^2} \cdot \frac{dII_v}{dv}, \\ & \quad = \sum_1^{\infty} (2v+1) \cdot i^v \cdot \frac{I_v}{x} \cdot II_v, \\ & \quad = i \cdot x \cdot e^{ixv}. \end{aligned} \right.$$

Bildet man nun nach Vorschrift der Formeln (13) und (14) z. B.:

$$E_{\vartheta} = \sum_1^{\infty} \frac{2v+1}{v \cdot (v+1)} \cdot i^{v-1} \cdot \frac{I_v'}{x} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} + \sum_1^{\infty} \frac{2v+1}{v \cdot (v+1)} \cdot i^v \cdot \frac{I_v}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathbb{P}_v}{\partial \vartheta},$$

so ergibt sich mit Benutzung der Formeln (44), (45) und (49):

$$E_{\vartheta} = - e^{ixv} \cdot \sin \vartheta.$$

Ebenso wird:

$$E_{\varphi} = \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} - \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta} = 0.$$

Ähnlich  $M_{\vartheta}$  und  $M_{\varphi}$ . Man kann also für die ebene Welle, anstatt der Ausdrücke (47) auch die folgenden brauchen:

$$(50) \left\{ \begin{aligned} E_r &= \sum_1^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu}, \\ E_{\vartheta} &= \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \varphi}, \\ E_{\varphi} &= \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} - \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta}, \\ M_r &= \sum_1^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu}, \\ M_{\vartheta} &= \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} + \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta}, \\ M_{\varphi} &= - \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \sum_1^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right.$$

#### Gebrochene und reflektierte Welle.

12. Wenn wir nun dazu übergehen, auch die Welle im Innern der Kugel und die von ihr nach außen ausstrahlende Welle durch Ausdrücke von der Form (13) und (14) wiederzugeben, so müssen wir dabei beachten: Erstens, daß im Innern der Kugel nur das mit  $I_{\nu}$  bezeichnete Integral der Gleichung (10) zu verwenden ist, weil alle anderen partikulären Integrale für  $x=0$ , d. h. im Zentrum der Kugel, unendlich werden müßten; zweitens, daß im Außenraum  $K_{\nu}(-x)$  zu verwenden ist, weil nur dieses den Faktor

$$e^{-ix} = e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}$$

hat, so daß die Komponenten der elektrischen und magnetischen Kräfte, die Zeit lediglich in der Kombination:

$$e^{2\pi i \left( n t - \frac{r}{\lambda'} \right)}$$

enthalten, was das Charakteristikum einer von der Kugel ausgehenden Strahlung ist.

Die Strahlung im Innern der Kugel läßt sich also folgendermaßen darstellen:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} E_{ri} &= \sum_1^\infty i \cdot b_\nu \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot P_\nu, \\ E_{\theta i} &= \sum_1^\infty \left( \frac{b_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I'_\nu}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I_\nu}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right), \\ E_{\varphi i} &= \sum_1^\infty \left( \frac{b_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I'_\nu}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{q_\nu}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right), \\ M_{ri} &= \sum_1^\infty q_\nu \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_\nu, \\ M_{\theta i} &= \sum_1^\infty \left( \frac{b_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I_\nu}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I'_\nu}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right), \\ M_{\varphi i} &= \sum_1^\infty \left( - \frac{b_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I'_\nu}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right.$$

Die Koeffizienten  $b_\nu$  und  $q_\nu$ , deren einem der Faktor  $i$  zugefügt ist, nur, damit die späteren Formeln etwas eleganter werden, sind nebst den in den folgenden Ausdrücken (52) vorkommenden  $a_\nu$  und  $p_\nu$  aus den Grenzbedingungen (7) zu ermitteln.

Im Außenraum kommt zu der ebenen Welle (50), die auf die Welle auftrifft, noch die reflektierte Strahlung:

$$\begin{aligned}
 E_{ra} &= \sum_1^{\infty} a_v i \cdot \frac{K_v(-x)}{x^2} \cdot P_v, \\
 E_{\theta a} &= \sum_1^{\infty} \left( \frac{a_v \cdot i}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{K_v'(-x)}{x} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} + \frac{p_v}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{K_v(-x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \varphi} \right), \\
 E_{\varphi a} &= \sum_1^{\infty} \left( \frac{a_v \cdot i}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{K_v'(-x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \varphi} - \frac{p_v}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{K_v(-x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \vartheta} \right), \\
 M_{ra} &= \sum_1^{\infty} p_v \cdot \frac{K_v(-x)}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_v, \\
 M_{\theta a} &= \sum_1^{\infty} \left( \frac{a_v \cdot i}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{K_v(-x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} + \frac{p_v}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{K_v'(-x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \varphi} \right), \\
 M_{\varphi a} &= \sum_1^{\infty} \left( -\frac{a_v \cdot i}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{K_v(-x)}{x} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} + \frac{p_v}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{K_v'(-x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \varphi} \right).
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

#### Ermittlung der Koeffizienten.

13. Den Radius der kleinen Kugel haben wir mit  $\varrho$  bezeichnet, den Brechungsexponenten des Mediums (Wassers) mit  $m_0$ , den komplexen Brechungsexponenten des Materials der Kugel mit  $m$ . Weiter wollen wir die Größen  $x_a$  und  $x_i$  für den speziellen Wert  $r = \varrho$  mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen, ferner den relativen Brechungsexponenten  $m/m_0$  mit  $m'$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2\pi \cdot m_0 \cdot \varrho}{\lambda} = \frac{2\pi \varrho}{\lambda'}, \\ \beta = \frac{2\pi \cdot m \cdot \varrho}{\lambda} = \frac{m}{m_0} \cdot \alpha = m' \cdot \alpha. \end{cases}
 \tag{53}$$

Endlich wollen wir noch die Abkürzungen brauchen:

$$\begin{cases} I_v(\alpha) = A_v & I_v'(\alpha) = A_v', \\ I_v(\beta) = B_v & I_v'(\beta) = B_v', \\ K_v(-\alpha) = C_v & K_v'(-\alpha) = C_v'. \end{cases}
 \tag{54}$$

Wir setzen nun in die Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned}
 (E_{\theta} + E_{\theta a})_{r=\varrho} &= (E_{\theta i})_{r=\varrho}, \\
 (E_{\varphi} + E_{\varphi a})_{r=\varrho} &= (E_{\varphi i})_{r=\varrho}, \\
 \alpha \cdot (M_{\theta} + M_{\theta a})_{r=\varrho} &= \beta \cdot (M_{\theta i})_{r=\varrho}, \\
 \alpha \cdot (M_{\varphi} + M_{\varphi a})_{r=\varrho} &= \beta \cdot (M_{\varphi i})_{r=\varrho},
 \end{aligned}$$

die Ausdrücke (50), (52), (51) ein und erhalten, da zwei Paare dieser Gleichungen sich als identisch erweisen, für  $a_v$ ,  $b_v$ ,  $p_v$ ,  $q_v$  die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} -(2\nu + 1) \cdot i^v \cdot \frac{A_v'}{\alpha} + a_v \cdot \frac{C_v'}{\alpha} &= b_v \cdot \frac{B_v'}{\beta}, \\ -(2\nu + 1) \cdot i^v \cdot A_v' + a_v \cdot C_v' &= b_v \cdot B_v', \\ (2\nu + 1) \cdot i^v \cdot \frac{A_v}{\alpha} + p_v \cdot \frac{C_v}{\alpha} &= q_v \cdot \frac{B_v}{\beta}, \\ (2\nu + 1) \cdot i^v \cdot A_v + p_v \cdot C_v &= q_v \cdot B_v. \end{aligned}$$

Daraus berechnen sich:

$$(55) \quad \begin{cases} a_v = + (2\nu + 1) \cdot i^v \cdot \frac{A_v' \cdot B_v \cdot \beta - B_v' \cdot A_v \cdot \alpha}{C_v' \cdot B_v \cdot \beta - B_v' \cdot C_v \cdot \alpha}, \\ p_v = - (2\nu + 1) \cdot i^v \cdot \frac{A_v \cdot B_v' \cdot \beta - B_v \cdot A_v' \cdot \alpha}{C_v \cdot B_v' \cdot \beta - B_v \cdot C_v' \cdot \alpha}. \end{cases}$$

Formeln zum praktischen Rechnen.

14. So einfach die Formeln (55) auf den ersten Anblick auch erscheinen, so schwierig ist es, sie zu diskutieren. Besonders erschwerend ist in dem Falle metallischer Kügelchen, daß  $\beta$  und damit zugleich  $B_v$ ,  $B_v'$  komplexe Größen sind. Aber auch im Falle nicht absorbierender Kügelchen, wo  $\beta$  reell ist, bleiben noch zwei unter allen Umständen komplexe Größen, nämlich  $C_v$  und  $C_v'$  in den Ausdrücken stehen.

Für nicht sehr große Kügelchen wird man stets am bequemsten mit den Formeln (27), (28), (29), (30) rechnen. Danach können wir setzen:

$$(56) \quad \begin{cases} A_v = \frac{\alpha^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot f_v, \\ B_v = \frac{\beta^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot g_v, \\ C_v = (-i)^v \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{\alpha^\nu} \cdot e^{-i\alpha} \cdot (h_v + i\alpha \cdot k_v); \\ A_v' = \frac{(\nu+1) \cdot \alpha^\nu}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot f_v', \\ B_v' = \frac{(\nu+1) \cdot \beta^\nu}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot g_v', \\ C_v' = -\nu \cdot (-i)^v \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{\alpha^{\nu+1}} \cdot e^{-i\alpha} \cdot (h_v' + i\alpha \cdot k_v'). \end{cases}$$

Die Faktoren  $f_\nu$ ,  $f'_\nu$  sind rasch konvergierende Potenzreihen in  $\alpha^2$ ;  $g_\nu$ ,  $g'_\nu$  dieselben Reihen in  $\beta^2$ ;  $h_\nu$ ,  $k_\nu$ ,  $h'_\nu$ ,  $k'_\nu$  sind endliche Potenzsummen in  $\alpha^2$ , also alles Ausdrücke, die verhältnismäßig leicht zu berechnen sind. Man kann sie direkt aus den Formeln (27) bis (30) entnehmen. Alle diese Summen  $f_\nu$ ,  $f'_\nu$  usw. fangen mit dem Glied 1 an, für Kügelchen, deren Durchmesser gegen die Wellenlänge des Lichtes innen und außen klein ist, nähern sie sich also alle sehr dem Wert 1, und man bekommt für  $A_\nu$ ,  $A'_\nu$  usw. sehr einfache Ausdrücke. Setzt man (56) in (55) ein und schreibt zur Abkürzung:

$$(57) \quad u_\nu = e^{i\alpha} \frac{f'_\nu}{h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu}, \quad v_\nu = \frac{f_\nu}{f'_\nu} \cdot \frac{g'_\nu}{g_\nu}, \quad w_\nu = \frac{h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu}{h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu} \cdot \frac{g'_\nu}{g_\nu},$$

$$(58) \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{m^2}{m_0^2} = m'^2,$$

so ergeben sich folgende praktische Formeln:

$$(59) \quad \begin{cases} a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2} \cdot u_\nu \cdot \frac{m'^2 - v_\nu}{m'^2 + \frac{\nu+1}{\nu} \cdot w_\nu}, \\ p_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2} \cdot u_\nu \cdot \frac{1 - v_\nu}{1 + \frac{\nu+1}{\nu} \cdot w_\nu}. \end{cases}$$

15. Es ist nicht schwierig, ungefähr zu beurteilen, wie  $a_\nu$  sich mit wachsender Teilchengröße ändert. Für kleine  $\alpha$  werden die  $f_\nu$ ,  $g_\nu$  usw. alle ziemlich genau gleich 1 und folglich kann man die Näherungsgleichung benutzen:

$$(60) \quad \begin{cases} a_\nu \sim \alpha^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{C_\nu}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2}, \\ C_\nu = \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + \frac{\nu+1}{\nu}} \cdot (-1)^{\nu-1}. \end{cases}$$

Hier ist  $C_\nu$  eine komplexe Zahl, deren absoluter Betrag nicht allzu weit von 1 abliegt.<sup>1)</sup> Während  $a_\nu$ , wie (60) zeigt, zunächst mit der  $(2\nu+1)$ ten Potenz von  $\alpha$  steigt, biegt bei größeren Werten von  $\alpha$  die Kurve der  $a_\nu$ -Werte ab und geht niemals über eine bestimmte GröÙe hinaus. Man sieht das, wenn man

1) Bei Goldkügelchen liegt beispielsweise der absolute Betrag von  $C_1$  zwischen 0,9 und 2,5, je nach der Farbe des Lichtes.

aus (29a) und (19) die Werte für  $I_v$  und  $K_v$  für sehr große Argumente nimmt. Da  $\alpha$  reell und  $\beta = \beta' - i \cdot \beta''$  komplex, so hat man:

$$\begin{aligned} K_v(-\alpha) &\sim e^{-i\alpha}, & K_v'(-\alpha) &\sim -i \cdot e^{-i\alpha}, \\ I_v(\alpha) &\sim \sin\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right), & I_v'(\alpha) &\sim \cos\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right), \\ I_v(\beta) &\sim -\frac{i}{2} \cdot e^{\beta''} \cdot e^{i \cdot \left(\beta' - \frac{\nu\pi}{2}\right)}, & I_v'(\beta) &\sim \frac{1}{2} \cdot e^{\beta''} \cdot e^{i \cdot \left(\beta' - \frac{\nu\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Also, wenn man dies in (55) einsetzt, so bekommt man als Grenzwert für sehr große  $\alpha$ :

$$(61) \quad \begin{cases} a_v \sim (2\nu + 1) \cdot c_v, \\ c_v = \frac{i^\nu \cdot e^{i\alpha}}{1 + m'} \cdot \left( \sin\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right) + i \cdot m' \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right) \right). \end{cases}$$

$c_v$  ist hier eine komplexe, periodisch mit  $\alpha$  veränderliche Größe, deren absoluter Betrag immer in der Gegend von 1 bleibt.

Da in (60) die Potenz  $\alpha^{2\nu+1}$  steht, außerdem aber der Nenner schnell mit  $\nu$  zunimmt, so muß zuerst  $a_1$  alle anderen Koeffizienten weit überragen. Wenn aber  $a_1$  seinem Grenzwert (61) zustrebt, schließt sich ihm als zweites  $a_2$  an, während alle folgenden noch klein bleiben. Später gesellt sich den beiden ersten auch  $a_3$  zu und so fort. Aus den Formeln für  $f_v$ ,  $g_v$  usw. ist ferner zu sehen, daß die Formel (60) für die später folgenden Koeffizienten immer länger annähernd gültig bleibt.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß, wie groß auch  $\alpha$  sein möge, doch immer von einem bestimmten  $\nu$  an alle Koeffizienten so klein gegen die ersten bleiben, daß man sie ganz außer acht lassen darf.

*Die von einer kleinen Kugel reflektierte Strahlung setzt sich im wesentlichen stets aus einer endlichen Zahl von Partialwellen zusammen, aber die Zahl der Partialwellen nimmt zu, wenn die Kugel größer wird.*

Dieser Satz ist zunächst nur für die „elektrischen Schwingungen“ des Teilchens bewiesen, denen die Koeffizienten  $a_v$  entsprechen, er wird sich aber auch für die „magnetischen Schwingungen“, die die auftreffende Welle erregt, d. h. die Koeffizienten  $p_v$  bestätigt finden, die wir in 17. diskutieren werden.

In dem Zahlenbeispiel, das ich unten bringe, um der Erklärung der optischen Eigenschaften kolloidaler Metallösungen näher zu kommen, werde ich bis zu einem Wert des Durchmessers  $2\rho = 180 \mu\mu$  gehen. Dieser Wert liegt schon an der Grenze der mikroskopischen Auflösbarkeit, entspricht also wohl der äußersten Größe der Teilchen kolloidaler Lösungen. Auch bei dem großen Durchmesser  $2\rho = 180 \mu\mu$ , sind schon von  $\nu = 3$  an alle höheren „elektrischen Partialschwingungen“ gegen die beiden ersten ganz verschwindend klein, wir brauchen also nur  $a_1$  und  $a_2$  zu berechnen.

Dagegen müßte man z. B. bei dem Regenbogenproblem, das man auch mit der hier angewendeten Methode in Angriff nehmen könnte, eine ziemlich große Zahl Partialwellen berücksichtigen und würde auf sehr große rechnerische Schwierigkeiten stoßen.

Die beiden ersten Koeffizienten sind:

$$(62) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \cdot \alpha^3 \cdot u_1 \cdot \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1}, \\ a_2 = -\frac{1}{6} \cdot \alpha^5 \cdot u_2 \cdot \frac{m'^2 - v_2}{m'^2 + \frac{3}{2}w_2}. \end{cases}$$

Wird  $\alpha$  sehr klein, so kann man die  $u$ ,  $v$ ,  $w$  gleich 1 rechnen und bekommt:

$$(63) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \cdot \alpha^3 \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 2}, \\ a_2 = -\frac{1}{6} \alpha^5 \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + \frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Natürlich ist für kleine  $\alpha$  auch schon  $a_2$  gegen  $a_1$  verschwindend klein, und es bleibt nur jene erste Partialwelle übrig, deren Existenz zuerst von Lord Rayleigh theoretisch bewiesen worden ist, die ich deswegen manchmal auch kurz die *Rayleighsche Strahlung* nennen werde.

16. Es sei auch noch der Spezialfall kurz erledigt, daß das Kügelchen aus einem vollkommen leitenden Material besteht. Bekanntlich ist dieser Fall zuerst von J. J. Thomson diskutiert und F. Ehrenhaft hat gemeint, die von Thomson entwickelte Theorie auf die Optik der kolloidalen Lösungen anwenden zu können. Obwohl dies aus den in Abschnitt 1.



genannten Gründen nicht geht, hat der Fall doch ein gewisses historisches und allgemein theoretisches Interesse. Wir setzen:

$$m'^2 = -i \cdot \infty \quad (\text{vgl. (3)}),$$

und vernachlässigen demgemäß in den Formeln (55) die Glieder mit dem Faktor  $\alpha$  gegen die mit dem Faktor  $\beta$ . Es ergibt sich so:

$$a_\nu = (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu'}{C_\nu'}.$$

Für kleine  $\alpha$  ist also:

$$a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^3 \cdot 3^3 \cdot \dots (2\nu-1)^3} \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{f_\nu'}{h_\nu' + i\alpha \cdot k_\nu'}.$$

Für große  $\alpha$  ergeben (19) und (30a):

$$a_\nu = (2\nu + 1) \cdot i^{\nu+1} \cdot e^{i\alpha} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\nu-1}{2}\pi\right).$$

Der absolute Betrag dieses Wertes schwankt regelmäßig periodisch zwischen 0 und  $(2\nu + 1)$  hin und her.

Von besonderem Interesse ist auch hier die Rayleighsche Welle. Der genaue Wert von  $a_1$  ist:

$$(64) \quad a_1 = 3 \cdot e^{i\alpha} \frac{\alpha \cdot \cos \alpha - (1 - \alpha^2) \cdot \sin \alpha}{i\alpha + (1 - \alpha^2)}.$$

Für unendlich kleine  $\alpha$  ergibt sich:

$$(65) \quad a_1 = 2 \cdot \alpha^3.$$

Der charakteristische Unterschied dieser Formel gegen (63) ist, daß dort noch der Faktor  $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$  hinzukommt, den man, wie wir noch sehen werden, bei Metallen auch nicht annähernd gleich 1 setzen darf, und der vor allen Dingen mit der Wellenlänge sehr stark variiert. Ein anderer sehr wichtiger Unterschied ist, daß in (65)  $a_1$  eine rein reelle Größe ist, während das richtige aus (63) berechnete  $a_1$  einen sehr beträchtlichen imaginären Teil hat. Dieser Teil bedingt, wie wir noch sehen werden, die Absorption in den kolloidalen Metallösungen.

17. Wir gehen nun über zur Diskussion der „magnetischen Schwingungen“, d. h. der Koeffizienten  $p_\nu$ . Für äußerst

kleine Teilchen ist Formel (59) nicht zu gebrauchen, da  $(1 - v_\nu)$  sich dann der Null nähert. Nach (57), ferner (29) und (30) ist:

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 - v_\nu &= \frac{1}{f'_\nu \cdot g_\nu} \cdot (f'_\nu \cdot g_\nu - f_\nu \cdot g'_\nu), \\ 1 - v_\nu &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\nu + 1)(2\nu + 3)} \frac{1}{f'_\nu \cdot g_\nu} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2\nu + 5} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{(2\nu + 5)(2\nu + 7)} \cdot \frac{\alpha^4 + 2 \frac{2\nu + 5}{2\nu + 3} \alpha^2 \beta^2 + \beta^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\nu + 1)(2\nu + 3)} \cdot \frac{l_\nu}{f'_\nu \cdot g_\nu}. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet also  $l_\nu$  ganz ähnlich wie die  $f_\nu, f'_\nu$  usw. eine schnell konvergierende Potenzreihe in  $\alpha^2$  und  $\beta^2$ , die für kleine Teilchendurchmesser gleich 1 wird. Wir setzen nun weiter:

$$(67) \quad s_\nu = e^{i\alpha} \cdot \frac{l_\nu}{g_\nu} \cdot \frac{1}{h'_\nu + i\alpha k'_\nu} = u_\nu \cdot \frac{l_\nu}{f'_\nu \cdot g_\nu},$$

dann gibt die Formel (59) für  $p_\nu$ :

$$(68) \quad p_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu \cdot (2\nu + 3)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+3}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu - 1)^2} s_\nu \frac{m'^2 - 1}{1 + \frac{\nu + 1}{\nu} \cdot w_\nu}.$$

Für sehr kleine Durchmesser kann man annähernd setzen:

$$(69) \quad p_\nu = \frac{(-1)^\nu}{(2\nu + 1)(2\nu + 3)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+3}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu - 1)^2} \cdot (m'^2 - 1).$$

Für große Durchmesser liefert (55), wenn man die Größen  $A_\nu, A'_\nu$  usw. (54) nach (29a) und (19) berechnet:

$$(70) \quad p_\nu \sim (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{m' \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right) + i \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right)}{m' + 1}.$$

Man kann also den Verlauf von  $p_\nu$  ganz ebenso beschreiben, wie es in (15) mit den  $a_\nu$  gemacht wurde.

Bei kleinen Teilchen wächst mit steigender Teilchengröße  $p_\nu$  ungefähr wie:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} p_\nu &\sim \alpha^{2\nu+3} \cdot \frac{C'_\nu}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu - 1)^2 \cdot (2\nu + 1)(2\nu + 3)}, \\ C'_\nu &= (m'^2 - 1) \cdot (-1)^\nu. \end{aligned} \right.$$

Der absolute Betrag von  $C'_\nu$  ist nicht sehr weit von 1 entfernt. Bei größeren Werten von  $\alpha$  biegt die Kurve der  $p_\nu$ -Werte ab und ändert sich schließlich bei sehr großen  $\alpha$  mit weiter wachsendem Teilchendurchmesser periodisch:

$$(72) \quad p_\nu \sim (2\nu + 1) \cdot c'_\nu.$$

$c'_\nu$  ist eine komplexe, periodisch sich ändernde Zahl, deren Amplitude nicht weit von 1 abliegt.

Für die magnetischen Partialschwingungen gelten dieselben Sätze, wie für die elektrischen und zwar läuft die  $\nu$ -te magnetische Schwingung ungefähr parallel mit der  $(\nu + 1)$ -ten elektrischen.

Durch Vergleichung der Formeln (69) und (70) mit (60) und (61) sieht man, daß der absolute Betrag von  $p_\nu$  im allgemeinen etwas unter dem von  $a_{\nu+1}$  liegt.

Die erste magnetische Partialschwingung ist z. B. für alle Teilchengrößen stets von derselben Größenordnung, wie die zweite elektrische.

*Sehr kleine Teilchen strahlen seitlich stets nur die Rayleighsche Welle aus, bei den ganz groben Teilchen in kolloidaler Lösung kommt noch die zweite elektrische und die erste magnetische Partialschwingung hinzu.*

Ich werde also in dem unten zu bringenden Zahlenbeispiel im ganzen nur drei Koeffizienten, nämlich:  $a_1, a_2, p_1$  zu berücksichtigen haben. Und zwar werde ich  $p_1$  für gröbere Teilchen nach der folgenden Formel berechnen:

$$(73) \quad p_1 = -2 \cdot \alpha^3 \cdot u_1 \frac{1 - v_1}{1 + 2w_1},$$

wo  $u_1, v_1, w_1$  ganz dieselben Größen sind, wie in (62). Für kleine Teilchen gilt die Näherungsformel:

$$(74) \quad p_1 = -\frac{\alpha^5}{15} \cdot (m^2 - 1).$$

18. Während die Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit bei den elektrischen Partialschwingungen zu Resultaten führte, die sich immerhin noch mit denen der exakten Theorie vergleichen ließen, liefert sie für die magnetischen Schwingungen völlig abweichende Resultate. Setzen wir in (55)  $\beta$  unendlich groß, so bekommen wir:

$$p_\nu = -(2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu}{C_\nu}.$$

Also für kleine Durchmesser nach (27) und (29):

$$p_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2} e^{i\alpha} \cdot \frac{f_\nu}{h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu},$$

ein Wert, der von ganz derselben Größenordnung ist, wie der unter der gleichen Annahme gefundene Wert von  $a_\nu$ .

*Nehmen wir an, daß die in dem Medium suspendierten Kügelchen vollkommene Leiter sind, so kommen wir dem verkehrten Resultat, daß die magnetische Partialschwingung  $\nu$ -ter Ordnung parallel geht mit der elektrischen Partialschwingung derselben Ordnungszahl (statt der nächsthöheren Ordnungszahl). Speziell für sehr feine Teilchen kommen wir so zu dem falschen Resultat, daß neben der Rayleighschen Welle die erste magnetische Schwingung ungefähr in derselben Größenordnung auftritt.*

J. J. Thomson, der zuerst den letzten Teil dieses Satzes bewies, zeigte bekanntlich schon, daß die Untersuchung der Polarisation des von kolloidalen Metallösungen seitlich zerstreuten Lichtes ergibt, daß das Resultat falsch ist. Die eigentümlichen Polarisationserscheinungen, die F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> und E. Müller<sup>2)</sup> später beobachtet haben, deuten keineswegs auf eine teilweise Gültigkeit der Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit hin. Wir werden weiter unten sehen, daß die exakte Theorie sie ganz ungezwungen erklärt.

Wir wollen, wegen der später folgenden zahlenmäßigen Diskussion, noch den Wert von  $p_1$  notieren:

$$(75) \quad p_1 = 3 \cdot e^{i\alpha} \frac{\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + i\alpha}.$$

Für sehr kleine Werte von  $\alpha$  wird:

$$(76) \quad p_1 = \alpha^3.$$

Vergleichen wir (76) mit (65), so sehen wir, daß die Amplitude der magnetischen Schwingung bei sehr kleinen, vollkommen leitenden Partikelchen gerade die Hälfte der elektrischen sein müßte.

#### Die Partialwellen.

19. Für das folgende wird es nützlich sein eine Vorstellung zu haben, wie Intensität und Schwingungsrichtung

1) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 11. p. 489. 1903.

2) E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 1. 1907.

der einzelnen Partialwellen (speziell der ersten) sich auf einer großen Kugel, in deren Zentrum das betrachtete Partikelchen liegt, von Punkt zu Punkt zu Punkt ändern.

Die Komponenten  $\mathcal{E}_r$  und  $\mathcal{H}_r$  brauchen wir nicht zu berücksichtigen, weil sie bei der Übertragung der Energie in den Außenraum nach dem Poyntingschen Satz gar nicht beteiligt sind. Es bleiben also nur die auf der Kugelfläche tangential verlaufenden Komponenten. Nun gilt aber nach (13) und (14) für jede Partialwelle:

$$E_\phi \cdot M_\phi + E_\psi \cdot M_\psi = 0,$$

d. h. die magnetischen Kraftlinien auf der Kugelfläche laufen überall senkrecht zu den elektrischen. Es genügt deshalb, um eine deutliche Vorstellung von der Strahlung zu bekommen, wenn man den Verlauf der elektrischen Kraftlinien auf der Kugelfläche angibt.

In den Figg. 3—10 sind die elektrischen Feldlinien auf einer das Teilchen umgebenden Kugelfläche für die vier

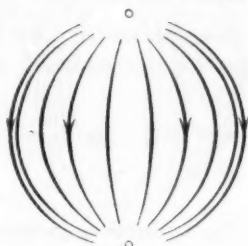


Fig. 3. Erste elektrische Partialschwingung.

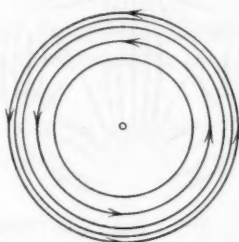


Fig. 4. Erste magnetische Partialschwingung.

ersten elektrischen und die vier ersten magnetischen Partialschwingungen gezeichnet. Als Ebene der Zeichnung ist die Ebene (1. 3.), d. h. die Schwingungsebene des Lichtstrahles gewählt, der die Wellen erregt. Es ist das eine Symmetrieebene des Vorganges, und man kann sich leicht zu der in den Figuren dargestellten vorderen Halbkugel die hinter der Zeichenebene liegende ergänzen, da die Kurven auf beiden ganz kongruent verlaufen. Bei den magnetischen Schwingungen ist  $E_r = 0$ , die Linien verlaufen also als geschlossene sphärische

Kurven, und zwar gibt es auf jeder der beiden Halbkugeln auf dem Äquator ( $\vartheta = \pi/2$ )  $\nu$  Zentralpunkte, in denen die Kraft Null ist und um die sich die Feldlinien, in  $\nu$  ver-

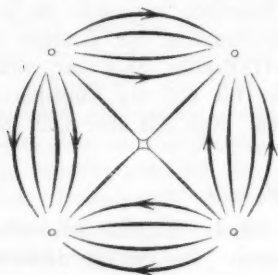


Fig. 5. Zweite elektrische Partialschwingung.

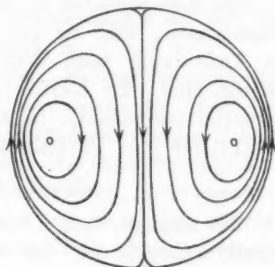


Fig. 6. Zweite magnetische Partialschwingung.

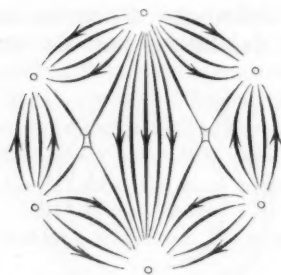


Fig. 7. Dritte elektrische Partialschwingung.

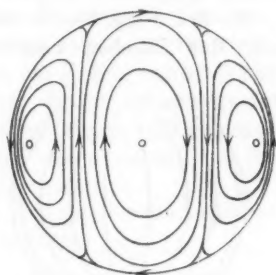


Fig. 8. Dritte magnetische Partialschwingung.

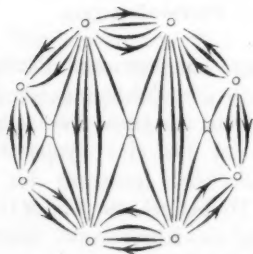


Fig. 9. Vierte elektrische Partialschwingung.

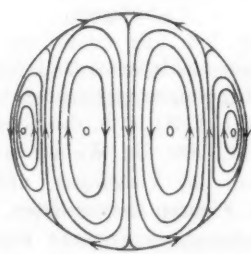


Fig. 10. Vierte magnetische Partialschwingung.

schiedenen Gruppen, herumschlingen. Bei den elektrischen Schwingungen verlaufen die Feldlinien dagegen in gewissen Kegelflächen, die alle durch  $\nu$  in der Zeichenebene liegende Kegeldurchmesser gehen. Die gezeichneten Kurven sind die Schnittkurven dieser Kegelflächen auf der Kugel. Diese Kurven laufen alle nach den  $\nu$  Polen aus, die durch die  $\nu$  Durchmesser ausgestochen werden. In Wirklichkeit biegen sich die Feldlinien aus der Kugeloberfläche heraus, um sich, je nach der Phase der Schwingung entweder im Innenraum oder im Außenraum zu schließen, da sie natürlich nicht Anfang und Ende haben können (abgesehen von den Linien unmittelbar am strahlenden Partikelchen).

Man kann sich nun auch leicht ein Bild von den magnetischen Feldlinien machen. Die Abbildungen Gruppe I geben ohne weiteres die magnetischen Feldlinien der Gruppe II und umgekehrt, wenn man sie um  $90^\circ$  dreht, d. h. Achse 1 und 2 vertauscht.

#### Die diffuse seitliche Strahlung.

20. Beobachtet wird in einer unendlichen Entfernung vom Teilchen, wir haben also in (52) einzusetzen:

$$K_\nu(-x) = e^{-ix},$$

wie aus Formel (19) hervorgeht. Dann ist weiter:

$$K'_\nu(-x) = -i \cdot e^{-ix},$$

also:

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} E_{\theta a} &= +i \cdot M_{\varphi a} = -i \cdot \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}}{r} \\ &\quad \cdot \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right), \\ E_{\varphi a} &= -i \cdot M_{\theta a} = -i \cdot \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}}{r} \\ &\quad \cdot \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned} \right.$$

Dabei ist angenommen, daß das durch die Lösung hindurchgehende Licht geradlinig polarisiert ist, und zwar so,

daß die elektrische Schwingungsrichtung die Achse 1 bildet. Nach (47) ist:

$$E_1 = -i \cdot M_2 = e \frac{2\pi i s}{\lambda'}.$$

*Bezogen auf die Intensität des durchgehenden Lichtes als Einheit ist die Intensität des diffus zerstreuten Lichtes:*

$$(78) \quad \begin{cases} J_\phi = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left| \sum_v^{\infty} \left( \frac{a_v}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} + \frac{p_v}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \varphi} \right) \right|^2, \\ J_\varphi = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left| \sum_v^{\infty} \left( \frac{a_v}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \varphi} - \frac{p_v}{v \cdot (v+1)} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \vartheta} \right) \right|^2. \end{cases}$$

In diesen Formeln soll durch die geraden Striche angedeutet werden, daß von der zwischen ihnen stehenden komplexen Größe der absolute Betrag zu nehmen ist. Man erkennt aus (78), was ja von vornherein klar ist, daß die Intensität umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung  $r$  ist. Die beiden Intensitäten  $J_\phi$  und  $J_\varphi$  bedeuten die der zum Meridian ( $J_\phi$ ) und die der zum Breitenkreis ( $J_\varphi$ ) parallel schwingenden Komponente. Beide Komponenten haben im allgemeinen einen ganz bestimmten Phasenunterschied, den man finden kann, wenn man in der bekannten Weise die Phasen der beiden komplexen Größen in Formel (77) berechnet. Sieht man also beliebig schief zum durchgehenden Strahl auf die Lösung, so muß man im allgemeinen elliptisch polarisiertes Licht bekommen, vorausgesetzt, daß der durchgehende Strahl geradlinig polarisiert ist und daß die suspendierten Partikelchen so groß sind, daß außer der (für sich allein geradlinig polarisierten) Rayleighschen Strahlung auch noch höhere Partialwellen bemerkbar sind.

Auszunehmen sind hiervon aber alle Richtungen, die in den beiden Symmetrieebenen 1. 3. und 2. 3. liegen. Aus den Figuren des Abschnittes 19. kann man ohne weiteres entnehmen:

*Beleuchtet man die kolloidale Lösung mit geradlinig polarisiertem Licht und beobachtet in einer Richtung, die zu seiner elektrischen Schwingung senkrecht steht, so ist das seitlich zerstreute Licht geradlinig polarisiert, und zwar ist seine elektrische Schwin-*



gungsrichtung parallel zu der des durch die Lösung gehenden Strahles. Dreht man bei unveränderter Visionsrichtung die Schwingungsrichtung des durchgehenden Strahles um  $90^\circ$ , so bekommt man wieder geradlinig polarisiertes Licht, aber seine Schwingungsrichtung ist ebenfalls um  $90^\circ$  gegen die frühere gedreht.

Der erste Fall wird in unseren Formeln charakterisiert durch  $\vartheta = \pi/2$ , der zweite durch  $\varphi = \pm \pi/2$ .

So einfach der eben ausgesprochene Satz auch erscheinen mag, so wichtig kann er trotzdem vielleicht werden. Die Beobachtungen, die Hr. Steubing (vgl. 1.) über die Polarisation des seitlich zerstreuten Lichtes angestellt hat, haben nämlich ergeben, daß, auch wenn man in der vorgeschriebenen Weise mit vollkommen geradlinig polarisiertem Licht beleuchtet, die seitliche Ausstrahlung immer noch einen allerdings sehr kleinen Betrag unpolarisierten Lichtes neben dem überwiegenden linear polarisierten enthält. Ich neige sehr dazu, hieraus zu schließen, daß die in kolloidalen Lösungen suspendierten Partikelchen keine Kugeln sein können, selbst wenn auch die übrigen optischen Eigenschaften mit dieser Annahme in Einklang sein mögen.

Der Fall, daß man mit unpolarisiertem Licht beleuchtet, läßt sich nunmehr schnell erledigen. Man kann sich das unpolarisierte Licht einfach in zwei inkohärente Strahlen von gleicher Intensität zerlegt denken, die geradlinig polarisiert sind, und zwar den einen so, daß seine elektrische Schwingungsrichtung senkrecht auf der durch die Richtung des Strahles und den Visionsradius bestimmten Ebene steht, den anderen so, daß seine elektrische Schwingung in diese Ebene fällt. Man bekommt dann im ausgestrahlten Licht ebenfalls zwei inkohärente, senkrecht zueinander linear polarisierte Komponenten, aber im allgemeinen von verschiedener Intensität. Das heißt also: das ausgestrahlte Licht ist teilweise linear polarisiert.

Geht durch die kolloidale Lösung ein unpolarisierter Lichtstrahl, so ist das seitlich zerstreute Licht stets teilweise linear polarisiert (niemals elliptisch). Und zwar ist die elektrische Schwingungsrichtung des polarisierten Anteils entweder senkrecht zu der durch Richtung des Strahles und Visionsradius bestimmten Ebene, oder sie fällt in diese Ebene, je nach der Größe der Teilchen und der Visionsrichtung.

Dieser Satz ist hier natürlich nur unter der Annahme kugelförmiger Teilchen bewiesen, aber es ist wohl nicht zweifelhaft, daß er in dem Fall amorpher (also nicht dichroitischer) kolloidaler Lösungen stets gilt.

Bei Lösungen mit sehr kleinen Teilchen wird bekanntlich nur die zuerst genannte Polarisationsrichtung beobachtet, bei groben Teilchen kann aber, wie wir noch sehen werden, auch die zweite vorkommen.

**Intensität des senkrecht zum durchgehenden Strahl zerstreuten Lichtes.**

21. Da man im allgemeinen mit unpolarisiertem Licht beobachtet, so haben nur die beiden Hauptfälle: I.  $\vartheta = \pi/2$ , II.  $\varphi = \pm \pi/2$  für uns Interesse. In beiden Fällen ist  $E_\varphi = M_\varphi = 0$ , es bleibt also nur  $J_\vartheta$ , das wir in den zwei Fällen als  $J_I$  und  $J_{II}$  unterscheiden wollen.  $J_I$  ist die Intensität der Strahlung, deren Schwingungsrichtung senkrecht steht zur Visionsebene, wie wir kurz sagen wollen.  $J_{II}$  die Intensität des in der Visionsebene schwingenden Strahles. Zunächst ergeben (44) und (45) für die beiden Fälle:

$$(79) \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \varphi = v, \\ \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} = -H_v(v), \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \vartheta} = (1-v^2) \cdot H'_v(v) - v \cdot H_v(v). \end{array} \right.$$

$$(80) \left\{ \begin{array}{l} \text{II. } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \vartheta = \pm v, \\ \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} = \pm \{(1-v^2) \cdot H'_v(v) - v H_v(v)\}, \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \varphi} = \mp H_v(v). \end{array} \right.$$

Das ist in (78) einzusetzen. Wir wollen uns nun zuerst noch weiter beschränken auf den Fall, daß nur senkrecht zum Strahl beobachtet wird. Wir setzen also  $v = 0$  und wenden nun die Formeln (40), (41) an. Es ergibt sich:

$$(81) \left\{ \begin{array}{l} J_I = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| -\frac{a_1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{\sigma+1} \cdot \frac{(2\sigma)_\sigma}{2^{2\sigma}} \cdot \left( \frac{a_{2\sigma+1}}{2(\sigma+1)} + p_{2\sigma} \right) \right|^2, \\ J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty (-1)^{\sigma+1} \cdot \frac{(2\sigma)_\sigma}{2^{2\sigma}} \cdot \left( a_{2\sigma} - \frac{p_{2\sigma-1}}{2\sigma-1} \right) \right|^2. \end{array} \right.$$

Diese Formeln sind so geschrieben, daß in jedem Summanden zwei Koeffizienten von gleicher Größenordnung

stehen (vgl. 17.). In dem Zahlenbeispiel kann ich mich, wie schon öfter erwähnt, auf die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  beschränken. Ich werde also mit folgenden Formeln rechnen:

$$(82) \quad \begin{cases} J_1 = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2, \\ J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \frac{a_2 - p_1}{2} \right|^2. \end{cases}$$

$J_{II}$  hat nur bei den allergrößten Teilchen einen merklichen Wert und auch da überwiegt immer noch  $J_1$ . Es ist das die Intensität der Rayleighschen Strahlung, und zwar im rechten Winkel zu der sie erregenden elektrischen Schwingung, wo sie gerade ihr Maximum hat. Unter anderen Winkeln ist ihre Intensität:

$$J = J_1 \cdot \sin^2 \vartheta$$

und ihre Gesamtstrahlung ist demnach:

$$R = J_1 \cdot 2\pi r^2 \cdot \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{8\pi}{3} \cdot r^2 \cdot J_1.$$

Danach kann man also, wenn man die Rayleighsche Strahlung in der Hauptrichtung mißt ( $J_1$ ), ihren Gesamtbetrag, d. h. also den Verlust, den der durchgehende Lichtstrahl durch sie erfährt, berechnen. Wir werden im folgenden stets die Größe:

$$(83) \quad R = \frac{2}{3\pi} \cdot \lambda'^2 \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2$$

angeben, die zugleich auch das Maß für  $J_1$  ist:

$$(84) \quad J_1 = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{R}{r^2}.$$

Wie man den Gesamtbetrag der Strahlung II findet, werden wir in 26. sehen.

#### Strahlung vieler Partikelchen.

22. Wir haben uns bisher immer noch auf die Berechnung des von einem einzelnen Kugelchen diffus zerstreuten Lichtes beschränkt. Wir wollen nun weiter zu dem Fall übergehen, daß sehr viele Kugelchen in dem Medium fein verteilt sind, alle von demselben Durchmesser  $2\rho$  und von demselben optischen

Verhalten  $m'$ . Es trifft dann auf jedes einzelne Kügelchen nicht bloß der gerade durchgehende Strahl, sondern auch das von den anderen Kügelchen diffus zerstreute Licht. Der Einfluß dieser zweiten Ätherschwingung auf den Vorgang in jedem Kügelchen und die dadurch bewirkte Veränderung der ganzen seitlichen Ausstrahlung ist für äußerst kleine Teilchen von L. Lorenz theoretisch untersucht worden und J. C. Maxwell-Garnett hat die Konsequenzen der Lorenzschen Theorie für die Optik der kolloidalen Metallösungen rechnerisch verfolgt (vgl. Abschnitt 1). Es ergibt sich da, daß die suspendierten Teilchen doch schon sehr eng beisammen liegen müssen, damit die Rückwirkung der seitlichen Ausstrahlung auf den Strahlungsvorgang selber bemerkbar sein soll.

*Die wässerigen kolloidalen Lösungen der Metalle werden wir im folgenden als optisch unendlich verdünnt betrachten, und die ganze seitliche Ausstrahlung einfach durch Multiplikation der Strahlung, die beim Vorhandensein eines einzigen Teilchens diffus zerstreut würde, mit der Zahl der vorhandenen Teilchen berechnen.*

Wenn man übrigens Bedenken gegen die Zulässigkeit dieser Annahme hätte, so könnte man sie leicht experimentell prüfen, indem man die Lösung etwas weiter verdünnte. Ist unsere Annahme richtig, so muß die Farbe der Lösung dabei unverändert bleiben, die Absorption in allen Teilen des Spektrums sich als proportional der Konzentration erweisen. Wäre dagegen die Annahme falsch, so müßte dabei ein Farbumschlag eintreten, wie ihn Kirchner und Zsigmondy an konzentrierten Goldlösungen in Gelatine beobachtet haben (vgl. Abschnitt 1). Soviel ich weiß, ist es bisher noch nicht gelungen, derartig konzentrierte wässerige Lösungen zu bekommen. Jedenfalls beschränke ich mich auf die gewöhnlichen verdünnten Lösungen.

Wir wollen im folgenden die Konzentration der Lösung angeben in Kubikmillimetern des Metalles pro Kubikmillimeter Wasser. Ist die Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter  $N$ , ihr Durchmesser  $2\rho$ , also das Volumen  $V = 4\pi\rho^3/3$ , so ist die Konzentration:

$$(85) \quad C = N \cdot V = \frac{\lambda'^3}{6\pi^2} \cdot N \cdot \alpha^3.$$

Andererseits ist nach (83) der Gesamtbetrag der Rayleighschen Strahlung:

$$R = N \cdot \frac{2}{3\pi} \cdot \lambda'^2 \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2,$$

also:

$$(86) \quad R = F_1 \cdot C,$$

wo  $F_1$  eine Größe bedeutet, die von der Konzentration unabhängig ist, aber wohl von der Teilchengröße und der Wellenlänge abhängt. Wir werden für diese Größe  $F_1$  zwei verschiedene Formeln brauchen, je nachdem die Teilchen klein oder groß sind:

$$(87) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{a_1}{2\alpha^3} \right|^2,$$

$$(88) \quad F_1 = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot \frac{1}{\alpha^3} \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2.$$

Die erste Formel ist deswegen besonders bequem für kleine Teilchen, weil, wie wir schon wissen, für sehr kleine Kügelchen  $a_1$  proportional mit  $\alpha^3$  zunimmt. Nach (62) ist:

$$\frac{a_1}{2\alpha^3} = u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1},$$

wo  $u_1, v_1, w_1$  für sehr kleine Teilchendurchmesser den Wert 1 annehmen. Es ist also:

$$(89) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1} \right|^2$$

und für äußerst kleine Teilchen:

$$(90) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 2} \right|^2.$$

Diese Formel (90) ist nichts anderes als die bekannte Rayleighsche Formel.<sup>1)</sup> Sie sagt aus, daß bei konstant gehaltener Konzentration die Strahlung einer Lösung um so größer ist, je größer die Teilchen sind. Und zwar ist die Intensität der Strahlung dem Teilchenvolumen direkt proportional. Außerdem überwiegen im allgemeinen die kurzwelligen Strahlen, wenn der von den optischen Eigenschaften der Kügelchen abhängige Faktor  $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$  nicht sehr mit der Farbe des Lichtes variiert. Diese letzte Voraussetzung trifft nun allerdings bei den Metallen durchaus nicht zu, das Licht, das

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 47. p. 379. 1899.

kolloidale Metallösungen mit feinsten Teilchen diffus ausstrahlen, ist deswegen im allgemeinen nicht blau, wie das von anderen trüben Lösungen, sondern hat eine für das betreffende Metall charakteristische Farbe. Ist  $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$  konstant, so gilt das bekannte Rayleighsche Gesetz, daß für verschiedene Farben unter sonst gleichen Umständen die Strahlung proportional mit  $\lambda'^{-4}$  ist.

Die Formel (88) kann uns dazu dienen, die Gesetze der Rayleighschen Strahlung bis in das Gebiet der sehr groben Teilchen zu verfolgen. Wie wir gesehen haben (im Abschnitt 15) ändert sich  $a_1$  bei sehr groben Teilchen als eine periodische Funktion des Teilchendurchmessers mit konstanter Amplitude. Aus (88) folgt demnach, daß bei konstanter Konzentration die Rayleighsche Strahlung mit wachsendem Teilchendurchmesser abnimmt, sobald die Teilchen grob sind. Und zwar ist die Rayleighsche Strahlung schließlich, abgesehen von periodischen Schwankungen, dem Teilchenvolumen umgekehrt proportional.

I. Bei konstant bleibender Konzentration nimmt die Rayleighsche Strahlung bei sehr feiner Verteilung zu, wenn der Teilchendurchmesser wächst, und zwar ungefähr proportional dem Teilchenvolumen, sie erreicht aber, nachdem die Teilchen schon ziemlich grob geworden sind, ein Maximum und nimmt von da an dauernd schnell ab, wenn die Verteilung noch gröber wird; wobei allerdings immer schwächer und schwächer werdende Maxima sich periodisch einstellen können.

II. Bestehen die Kügelchen aus vollkommen leitendem oder überhaupt vollkommen weißem Material, so ist der Teilchendurchmesser, bei welchem das Maximum der Strahlung erreicht wird, proportional der Wellenlänge, und der Maximalwert der Strahlung selber ist umgekehrt proportional der Wellenlänge.

Der zweite Satz, der unmittelbar aus Formel (88) abzulesen ist, gilt natürlich für kolloidale Metallösungen nicht.

Man könnte das Auftreten dieses Strahlungsmaximums, das auch bei Trübungen durch nicht leitende Körper (Mastixtrübung, Dampfstrahl usw.) auftreten muß, allerdings an einer anderen Stelle, wie bei Leitern, mit einigen Vorbehalten vielleicht als *optische Resonanz* bezeichnen. Man muß dabei aber ja im Auge behalten, daß diese „optische Resonanz“ nur ganz flache Maxima mit sich bringt, und daß demgemäß das

Energiespektrum der diffusen Strahlung auch bei genauer Gleichheit aller trübenden Teilchen nur geringe Erhebungen über einen Durchschnittswert zeigen wird, wenn die Teilchen groß geworden sind. Das ausgestrahlte Licht wird daher bei trüben Körpern mit nicht leitenden Partikelchen (Dampfstrahl, Mastixtrübung) schließlich nahezu weiß, mit einer nur schwach hervortretenden Farbennuance. Ähnlich verhalten sich auch die kolloidalen Metallösungen; wie wir sehen werden, tritt z. B. bei Gold im allgemeinen das Gelb etwas hervor, entsprechend der gelben Eigenfarbe.

#### Rayleighsche Strahlung von Goldlösungen.

23. Ich beginne nun, die optischen Eigenschaften einer Suspension winzig kleiner Goldkügelchen in Wasser zu berechnen, zunächst die Rayleighsche Strahlung. Ich lege folgende Zahlen zugrunde, die sich ergeben, wenn man durch die von Hagen und Rubens<sup>1)</sup> gemessenen Zahlenwerte eine möglichst glatte Kurve zieht. Nur den Wert des Reflexionsvermögens im Violett, der von Hagen und Rubens sicher zu klein angegeben wird<sup>2)</sup>, habe ich etwas verändert.

$\lambda$	$R$ (H. u. R.)	$\nu \cdot x$ (H. u. R.)	$R$ ang.	$\nu \cdot x$ ang.	$m$	$m'^2$	$\lambda'$
420	0,298	1,72	0,332	1,70	1,70 - i. 1,70	0,00 - i. 3,20	318
450	0,331	1,73	0,338	1,72	1,73 - i. 1,72	-0,017 - i. 3,32	336
500	0,470	2,07	0,480	2,02	1,10 - i. 2,02	-1,60 - i. 2,49	374
525	—	—	0,618	2,23	0,79 - i. 2,23	-2,45 - i. 1,98	393
550	0,740	2,32	0,730	2,45	0,57 - i. 2,45	-3,20 - i. 1,57	412
600	0,844	2,91	0,850	2,96	0,38 - i. 2,96	-4,84 - i. 1,26	450
650	0,889	3,58	0,888	3,54	0,41 - i. 3,54	-6,97 - i. 1,63	487

In dieser Tabelle enthält die erste Kolumne die Wellenlänge der betreffenden Farbe im Vakuum, die zwei folgenden das Reflexions- und das Absorptionsvermögen nach Hagen und Rubens, die dritte und vierte Kolumne die von mir zur Berechnung gewählten Zahlen,  $m$  ist der daraus berechnete komplexe Brechungsindex des Goldes, bezogen auf das Vakuum,  $m'^2$  das Quadrat des komplexen Brechungsindex,

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1 u. 432. 1908.

2) Vgl. E. Hagen u. H. Rubens, l. c. p. 458.

bezogen auf Wasser ( $m'^2 = m^2/m_0^2$ ), endlich  $\lambda'$  die Wellenlänge in Wasser.

Ferner will ich im folgenden noch eine praktische Abkürzung einführen:

$$(91) \quad \frac{a_1}{2\alpha^3} = \alpha_1.$$

Die Rayleighsche Strahlung berechnet sich dann nach (87) als:

$$(92) \quad \begin{cases} F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot |\alpha_1|^2, \\ \alpha_1 = u_1 \cdot \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1}. \end{cases}$$

Die Strahlung für unendlich feine Partikelchen ergibt sich, wenn man  $u_1, v_1, w_1$  alle drei gleich 1 setzt. Für Gold bekommt man folgende Werte für  $(\alpha_1)_0 = (m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$ :

$\lambda =$	420	450	500	525
	0,579 - i. 0,675	0,602 - i. 0,666	0,807 - i. 1,180	1,330 - i. 1,440
$\lambda =$	550	600	650	
	1,925 - i. 1,211	1,880 - i. 0,991	1,545 - i. 0,180	

also jedenfalls ganz andere, als man bei unendlich großer Leitfähigkeit finden würde. Für vollkommene Leiter ergibt nämlich die Formel (65):

$$(\alpha_1)_0 = 1$$

ganz unabhängig von der Wellenlänge. Allgemein hat für Metalle  $\alpha_1$  die Form:

$$\alpha_1 = \alpha'_1 - i \cdot \alpha''_1$$

und es ist  $|\alpha_1|^2 = \alpha'^2_1 + \alpha''^2_1$ . Um den Unterschied gegen vollkommene Leiter, für die  $|\alpha_1|^2 = 1$  wäre, gerade im Fall der Strahlung recht deutlich hervortreten zu lassen, will ich auch noch die Werte  $|\alpha_1|^2$  für Gold hinschreiben:

420	450	500	525	550	600	650
0,790	0,805	2,05	3,84	5,18	3,70	2,42

Wir können uns nun schon ein Bild von dem Energiespektrum der seitlichen Ausstrahlung von sehr kleinen Teilchen machen, da sie ja gleich dem Produkt aus Konzentration, Teilchenvolumen und der Größe  $24\pi^3 \cdot |\alpha_1|^2 / \lambda'^4$  ist.

Die folgende Tabelle gibt diese Größe sowohl für vollkommen leitende Kügelchen als auch für Goldkügelchen:



	420	450	500	525
$\frac{24 \pi^3}{\lambda'^4} \cdot 1$	$7,76 \cdot 10^{10}$	$5,85 \cdot 10^{10}$	$3,81 \cdot 10^{10}$	$3,18 \cdot 10^{10}$
$\frac{24 \cdot \pi^3}{\lambda'^4} \cdot  a_1 ^2$	$6,12 \cdot 10^{10}$	$4,71 \cdot 10^{10}$	$7,77 \cdot 10^{10}$	$11,95 \cdot 10^{10}$
	550	600	650	
$\frac{24 \pi^3}{\lambda'^4} \cdot 1$	$2,59 \cdot 10^{10}$	$1,82 \cdot 10^{10}$	$1,315 \cdot 10^{10}$	
$\frac{24 \cdot \pi^3}{\lambda'^4} \cdot  a_1 ^2$	$18,37 \cdot 10^{10}$	$6,70 \cdot 10^{10}$	$3,17 \cdot 10^{10}$	

Als Längeneinheit habe ich hier, was ich auch stets im folgenden tun werde, das Millimeter gewählt.

*Mit Ausnahme des äußersten Blau und des Violett ist die Strahlung der Goldkugeln stärker als die von vollkommen leitenden Kugeln sein würde.*

Man könnte also vielleicht sagen, daß die Goldatome auf die Lichtwellen resonieren, und zwar am besten auf grüngelb. Man müßte dann aber annehmen, daß sie in größeren Teilchen besser mit dem schwingenden Äther gekoppelt sind, als in kleinen, weil die Ausstrahlung mit dem Volumen der Teilchen wächst.

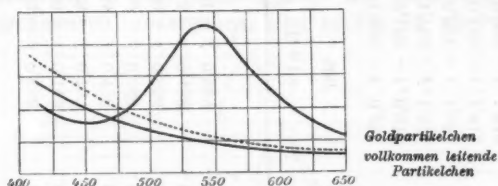


Fig. 11. Ausstrahlung einer unendlich feinen Suspension.

Die Fig. 11 stellt die Ausstrahlung kleiner Goldteilchen und kleiner vollkommen leitender Partikelchen noch einmal graphisch dar. (Die punktierte Kurve gibt die Ausstrahlung der letzteren nach Hinzufügung der ersten magnetischen Schwingung (vgl. 18.) wieder). Die zuletzt genannte Strahlung folgt ganz genau dem Rayleighschen Gesetz (proportional  $\lambda'^{-4}$ ).

Um die Strahlung auch für gröbere Verteilungen zu finden, mußte ich  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  berechnen, die sich aus Reihen nach  $\alpha^2$  (bzw.  $\beta^2 = m'^2 \cdot \alpha^2$ ) zusammensetzen. Ich führte die Rechnung für die in der ersten Kolumne der folgenden Tab. I verzeichneten Werte von  $\alpha^2$  aus, zugleich berechnete ich  $a_1$  auch für den Fall eines vollkommenen Leiters für dieselben  $\alpha^2$ .

Tabelle I.  
Werte des Koeffizienten  $a_1 = a_1/2\sigma^2$ .

$\sigma^2$	Vollkommener Leiter	Gold			
		420	450	500	525
0	1,00	0,579 - $\pm$ 0,675	0,602 - $\pm$ 0,666	0,807 - $\pm$ 1,180	1,380 - $\pm$ 1,440
0,2	1,04 - $\pm$ 0,065	0,484 - $\pm$ 0,755	0,505 - $\pm$ 0,743	0,528 - $\pm$ 1,312	0,850 - $\pm$ 1,823
0,4	1,04 - $\pm$ 0,188	0,343 - $\pm$ 0,750	0,368 - $\pm$ 0,757	0,216 - $\pm$ 1,211	0,263 - $\pm$ 1,640
0,6	0,961 - $\pm$ 0,318	0,224 - $\pm$ 0,699	0,244 - $\pm$ 0,706	0,042 - $\pm$ 1,029	-0,028 - $\pm$ 1,347
0,8	0,831 - $\pm$ 0,410	0,145 - $\pm$ 0,632	0,156 - $\pm$ 0,640	-0,047 - $\pm$ 0,849	-0,114 - $\pm$ 1,061
1,0	0,698 - $\pm$ 0,487	0,094 - $\pm$ 0,559	0,100 - $\pm$ 0,566	-0,056 - $\pm$ 0,715	-0,126 - $\pm$ 0,855
1,5	0,405 - $\pm$ 0,366	0,038 - $\pm$ 0,401	0,043 - $\pm$ 0,406	-0,044 - $\pm$ 0,480	-0,075 - $\pm$ 0,564
2,0	0,265 - $\pm$ 0,256	0,028 - $\pm$ 0,297	0,031 - $\pm$ 0,299	-0,015 - $\pm$ 0,349	-0,029 - $\pm$ 0,395
2,5	0,190 - $\pm$ 0,176	0,026 - $\pm$ 0,225	—	—	—

$\sigma^2$	Gold		
	550	600	650
0	1,925 - $\pm$ 1,311	1,880 - $\pm$ 0,391	1,545 - $\pm$ 0,180
0,2	1,602 - $\pm$ 2,050	2,190 - $\pm$ 0,977	1,920 - $\pm$ 0,515
0,4	0,975 - $\pm$ 2,040	1,750 - $\pm$ 1,874	1,767 - $\pm$ 1,080
0,6	0,057 - $\pm$ 1,719	0,807 - $\pm$ 1,980	1,238 - $\pm$ 1,492
0,8	-0,107 - $\pm$ 1,306	0,160 - $\pm$ 1,612	0,673 - $\pm$ 1,431
1,0	-0,134 - $\pm$ 1,014	0,095 - $\pm$ 1,240	0,353 - $\pm$ 1,191
1,5	-0,079 - $\pm$ 0,627	0,009 - $\pm$ 0,721	0,124 - $\pm$ 0,718
2,0	-0,022 - $\pm$ 0,435	0,032 - $\pm$ 0,479	0,096 - $\pm$ 0,471
2,5	—	—	—

Ich habe darauf die Strahlung berechnet (87):

$$F_1 = \frac{24 \cdot \pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{a_1}{2\alpha^3} \right|^2 = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot \alpha^3 \cdot |a_1|^2.$$

Die zu jedem Wert von  $\alpha^2$  gehörenden Teilchendurchmesser:

$$2\rho = \frac{\lambda'}{\pi} \cdot \sqrt{\alpha^2}$$

kann man aus folgender Tabelle entnehmen:

$\alpha^2$	$\lambda = 420$	450	500	525	550	600	650
0,2	44,6	47,8	53,2	55,9	58,6	64,0	69,8
0,4	63,1	67,6	75,2	79,1	82,9	90,5	98,1
0,6	77,3	82,9	92,2	96,8	101,5	110,8	120,1
0,8	89,3	95,8	106,5	111,8	117,2	128,0	138,7
1,0	99,8	107,0	119,0	125,0	131,0	143,0	155,0
1,5	122,2	131,1	145,8	153,1	160,5	175,2	190,0
2,0	141,1	151,3	168,3	176,8	185,3	202,2	219,2
2,5	157,7	169,1					

Teilchendurchmesser in  $\mu\mu$ .

Die Kurven, die die Abhängigkeit der Strahlung vom Teilchendurchmesser wiedergeben, sind in Fig. 12 ausgeführt.

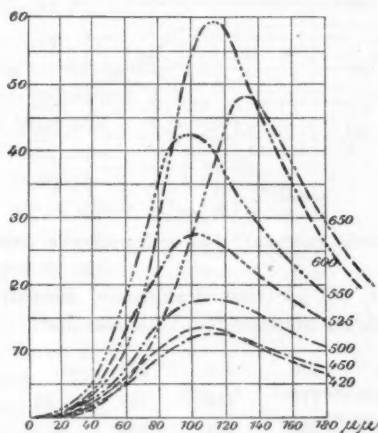


Fig. 12. „Optische Resonanz“ von Goldkugeln.

Die Abszissen sind die Teilchendurchmesser in  $\mu\mu$ , die Ordinaten geben die Gesamtstärke der Strahlung  $R$ , die von einem

Kubikmillimeter einer Lösung von der Konzentration  $10^{-6}$  (1 cbmm Gold pro Liter Wasser) ausgeht, und zwar in Promille der Stärke des durch einen Quadratmillimeter hindurchgehenden Lichtbündels.

Die Größe  $F_1$  bekommt man also aus den durch die Ordinaten dargestellten Zahlen durch Multiplikation mit  $10^3$ . Zum Vergleich habe ich in Fig. 13 die entsprechenden Kurven (lediglich der Rayleighschen Strahlung) in demselben Maßstab auch für Kügelchen eines vollkommenen Leiters gezeichnet. Die Durchmesser, bei denen das Maximum der Strahlung erreicht wird, sind hier den Wellenlängen  $\lambda'$  proportional, und zwar ist:

$$2 \varrho_{\text{Max.}} = 0,324 \cdot \lambda'.$$

Die Maxima nehmen mit wachsender Wellenlänge wie  $1/\lambda'$  ab.

Die Ausstrahlung der Goldteilchen ist, abgesehen von Blau und Violett, durchweg bedeutend größer als die der vollkommen leitenden Teilchen. Es ist, wie schon oben gesagt wurde, als ob zu der „Resonanz“ der Teilchen noch die Resonanz der Goldatome im Gelb hinzukäme. Am höchsten geht

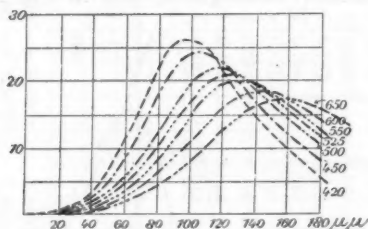


Fig. 13. „Optische Resonanz“ von vollkommen leitenden Kügelchen.

die Kurve für  $600 \mu\mu$  (also Orangegelb) hinauf. Die Durchmesser der stärkst strahlenden Teilchen sind:

	420	450	500	525	550	600	650
$2 \varrho_{\text{Max.}}$	105	111	110	100	96	113	131
$\lambda'$	113	336	374	393	412	450	487
$\frac{2 \varrho \cdot \text{Max.}}{\lambda'}$	0,336	0,331	0,294	0,255	0,233	0,252	0,269

Also  $2 \varrho_{\text{Max.}}$  liegt im allgemeinen zwischen  $\lambda'/4$  und  $\lambda'/3$ .

Aus den Kurven Fig. 12 kann man leicht die Energiespektren der Ausstrahlungen bei bestimmten Teilchengrößen gewinnen. Man kann aus den Kurven folgende Zahlen entnehmen:

$2 \rho$	420	450	500	525	550	600	650
20	0,262	0,199	0,388	0,546	0,637	0,299	0,189
40	2,10	1,60	2,72	4,62	5,90	2,92	1,35
60	6,2	5,0	8,0	13,7	19,7	12,3	5,9
80	10,4	9,1	14,1	22,9	37,8	33,0	14,7
100	13,2	12,0	17,2	27,1	42,3	55,5	29,0
120	12,5	12,0	17,1	25,0	36,0	57,5	45,0
140	10,0	10,5	15,0	20,8	27,9	44,5	46,2
160	7,9	8,5	12,4	17,1	22,5	33,3	36,8
180	6,3	7,2	10,4	13,8	17,7	25,0	28,0

Mit diesen Zahlen sind die Kurven in Fig. 14 konstruiert. Man sieht aus ihnen:

*Kleine kugelförmige Goldpartikelchen müssen im Ultramikroskop gelbgrün aussehen. Je größer sie werden, um so mehr verändert sich ihre Farbe zu Gelb und zu Rotgelb. Bei konstant gehaltener Konzentration strahlen am stärksten Lösungen, deren Teilchendurchmesser zwischen 100 und 140  $\mu$  liegt, ihre Partikelchen senden hauptsächlich orangefarbenes Licht aus. Die stärkstrahlenden Lösungen sind deswegen im auf fallenden Licht braun.*

Daß diese Farbenerscheinungen durch das spezielle optische Verhalten des Goldes bedingt sind, sieht man,

wenn man sich aus den „Resonanzkurven“ vollkommen leitender Kügelchen die entsprechenden Strahlungskurven konstruiert. Ich habe das in Fig. 15 für die Teilchengrößen  $2 \rho = 100, 120, 140$ ,

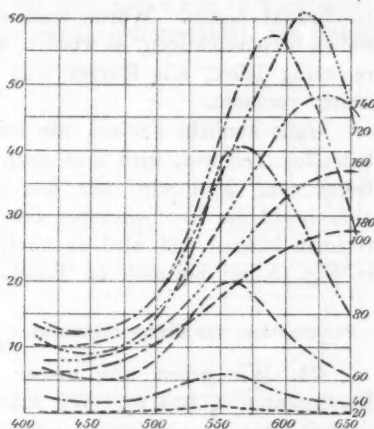


Fig. 14. Ausstrahlung kolloidaler Goldlösungen.

160, 180  $\mu\mu$  getan. Es sind das also alles schon recht grobe Trübungen. Während bei  $2\rho = 100$  die Kurve noch recht stark gegen Violett ansteigt, flacht sie sich mit wachsender Teilchendicke immer mehr ab und zeigt ein ganz schwaches Maximum, das bei 180  $\mu\mu$  schon bei einer Wellenlänge, die größer als 650  $\mu\mu$  ist, liegt. Das ausgestrahlte Licht ist also

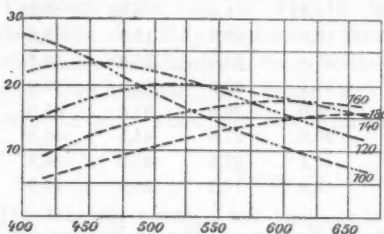


Fig. 15. Ausstrahlung von groben, vollkommen leitenden Kugeln.

bei Teilchen, die größer als 100  $\mu\mu$  sind, in der Tat ziemlich weiß, mit einem schwachen Farbenton, der je nach der Größe der Teilchen blau, grün, gelb, rot sein kann. Bei 180  $\mu\mu$  müßte allerdings nach Fig. 15 Orange ziemlich deutlich sein; indessen liegt das nur

daran, daß wir uns hier auf die Rayleighsche Strahlung beschränkt haben. Würde man auch die folgenden Partialwellen berücksichtigen, so würden, wie eine leichte Übersichtsrechnung lehrt, alle Kurven und besonders die letzte noch weiter verflacht.

Ganz ähnliche Farben, wie bei den fingierten vollkommen leitenden Teilchen, wird man auch bei farblosen Partikelchen bekommen. Man wird aus den von mir benutzten Formeln z. B. leicht die Erscheinungen des farbigen Dampfstrahles berechnen können und wird da ähnliche Kurven bekommen, wie in Fig. 15 nur bei anderen Teilchengrößen.

#### Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes von Goldlösungen.

24. Wir gehen nun weiter über zur Berechnung der Koeffizienten  $a_2$  und  $p_1$ . Wir führen auch hier zur Bequemlichkeit neue Bezeichnungen ein:

$$(93) \quad a_2 = -\frac{\alpha_2}{2\alpha^3}, \quad p_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}.$$

Aus (62), (73), (74) folgt:

$$(94) \quad a_2 = \frac{\alpha^2}{12} \cdot u_2 \frac{m'^2 - \epsilon_2}{m'^2 + 1,5 \cdot w_2}, \quad p_1 = u_1 \cdot \frac{r_1 - 1}{1 + 2w_1},$$

und für kleine Werte von  $\alpha$ :

$$(95) \quad a_2 = \frac{\alpha^2}{12} \cdot \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 1,5}, \quad v_1 = \frac{\alpha^2}{30} \cdot (1 - m'^2).$$

Hier sind  $u_1, v_1, w_1$  die schon bei der Berechnung von  $a_1$  benutzten Funktionen von  $\alpha^2$ ;  $u_2, v_2, w_2$  sind aus den Formeln (57) und (27) bis (30) zu entnehmen.

Aus den in Tab. II u. III (p. 426) verzeichneten Werten von  $a_2$  und  $v_1$  ersieht man, daß die zweite elektrische und die erste magnetische Partialwelle erst bei sehr grober Verteilung gegen die Rayleighsche Strahlung aufkommen können. Am stärksten treten sie ungefähr bei  $550 \mu\mu$  hervor. Berechnet man nach (82) für  $550 \mu\mu$  das Verhältnis  $J_{II}/J_I$  für die senkrecht zum durchgehenden Strahl austretende Strahlung:

$$(96) \quad \frac{J_{II}}{J_I} = \frac{|a_2 - p_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{|a_2 + b_1|^2}{|a_1|^2},$$

so ergibt sich:

$\alpha^2$	klein	1	2
$J_{II}/J_I$	$0,016 \cdot \alpha^4$	0,059	0,642
$2\varphi$	—	$131 \mu\mu$	$185,3 \mu\mu$

Mit Hilfe dieser Zahlen ist die eine Kurve Fig. 16 konstruiert. Man kann nun auch, wie es gewöhnlich geschieht, den Gehalt der Strahlung an polarisiertem Licht in Prozenten angeben, er ist:

$$P = \frac{J_I - J_{II}}{J_I + J_{II}}.$$

In unserem Beispiel ist:

$\alpha^2$	1	2
$P$	0,885	0,22
$2\varphi$	$131 \mu\mu$	$185,3 \mu\mu$

Die Größe  $P$  wird durch die zweite Kurve in Fig. 16 dargestellt.

Wenn die Strahlung einer kolloidalen Goldlösung unter  $90^\circ$  zum hindurchgehenden Strahl nicht vollständig polarisiert ist, so folgt daraus, daß die Lösung Teilchen enthält, deren Durchmesser weit über  $100 \mu\mu$  liegen. Bei einer Teilchengröße von  $130 \mu\mu$  beträgt die Polarisation noch ungefähr 90 Proz.

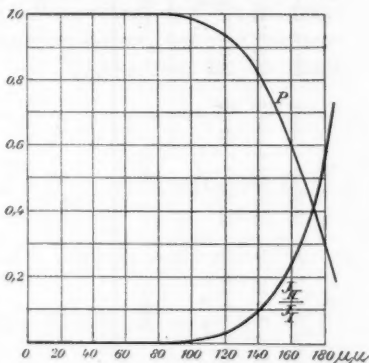


Fig. 16. Polarisation des unter  $90^\circ$  ausgestrahlten Lichtes von  $550 \mu\mu$  Wellenlänge.

# Tabelle II.

Werte von  $a_2 = -\frac{a_3}{2 \cdot a^3}$ .

$a^2$	420	450	500	525	550	600	650
klein {	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$
1	0,058 - i. 0,053	0,060 - i. 0,052	0,087 - i. 0,084	0,124 - i. 0,085	0,149 - i. 0,061	0,138 - i. 0,021	0,118 - i. 0,010
2	0,047 - i. 0,059	0,049 - i. 0,058	0,063 - i. 0,101	0,102 - i. 0,124	0,152 - i. 0,114	0,157 - i. 0,043	0,132 - i. 0,023
2,5	0,053 - i. 0,118	0,057 - i. 0,119	0,038 - i. 0,188	0,052 - i. 0,258	0,108 - i. 0,322	0,264 - i. 0,261	0,260 - i. 0,151
	0,039 - i. 0,140						

G. Mie.

# Tabelle III.

Werte von  $p_1 = \frac{p_1}{2 \cdot a^3}$ .

$a^2$	420	450	500	525	550	600	650
klein {	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$	$a^3 \times$
1	0,038 + i. 0,107	0,034 + i. 0,111	0,087 + i. 0,083	0,115 + i. 0,066	0,140 + i. 0,052	0,195 + i. 0,042	0,266 + i. 0,054
2	0,045 + i. 0,065	0,045 + i. 0,068	0,063 + i. 0,042	0,072 + i. 0,031	0,081 + i. 0,025	0,100 + i. 0,020	0,117 + i. 0,021
1,5	0,064 + i. 0,072	0,065 + i. 0,073	0,078 + i. 0,051	0,087 + i. 0,042	0,094 + i. 0,037	0,110 + i. 0,036	0,123 + i. 0,041
	0,065 + i. 0,071						



Die Lösungen, deren Teilchen über  $100\ \mu$  dick sind, sind nun gerade die, die hauptsächlich gelb und rot strahlen. Wir werden im folgenden noch sehen, daß sie stets blau-durchsichtig sind.

*Nur die Teilchen von blauen Goldlösungen strahlen Licht aus, das unter  $90^\circ$  gegen den durchgehenden Strahl nur wenig polarisiert ist.*

Dieser Satz ist allerdings mit einem Vorbehalt auszusprechen, da er unter der Annahme kugelförmiger Teilchen abgeleitet ist. Es gibt jedenfalls auch blaue Lösungen, die unter  $90^\circ$  so gut wie vollständig polarisiertes Licht ausstrahlen. Aber sicher kann man wohl sagen, daß es keine roten Lösungen geben kann, die nicht unter  $90^\circ$  vollständig polarisiertes Licht geben. Wenn Beobachtungen ein anderes Resultat liefern<sup>1)</sup>, so folgt daraus mit Sicherheit, daß die angewandten Lösungen inhomogen waren, daß sie viele schwach strahlende, aber stark absorbierende Rotteilchen und verhältnismäßig wenige, stark strahlende Blauteilchen enthielten.

25. Wir wollen nun weiter dazu übergehen, die Polarisation des Lichtes bei verschiedenen Winkeln gegen den durchgehenden Strahl zu berechnen. Wir wollen den Winkel gegen die Richtung, von der der Strahl herkommt, mit  $\gamma$  bezeichnen. In den beiden Hauptfällen I und II (Abschnitt 21) ist dann:

$$\text{I. } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad v = \cos \gamma$$

$$J_1 = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty \left\{ \frac{a_v}{v \cdot (v+1)} \cdot II_v + \frac{p_v}{v \cdot (v+1)} \cdot (v \cdot II_v - (1-v^2) \cdot II_v') \right\} \right|^2.$$

$$\text{II. } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad v = \cos \gamma.$$

$$J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty \left\{ \frac{a_v}{v \cdot (v+1)} \cdot (v \cdot II_v - (1-v^2) \cdot II_v') + \frac{p_v}{v \cdot (v+1)} \cdot II_v \right\} \right|^2.$$

Da es uns im folgenden nur auf den relativen Wert  $J_{II} : J_1$  ankommt, so wollen wir nur die Größen:

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{\lambda'^2} \cdot \frac{J_1}{\alpha^6}, \quad \mathfrak{J}_{II} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{\lambda'^2} \cdot \frac{J_{II}}{\alpha^6}$$

1) Vgl. z. B. E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 13, 16. 1907.

berechnen. Ferner beschränken wir uns wie immer auf die ersten Glieder. Es ergibt sich:

$$(97) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_I = |a_1 - (a_2 - v_1) \cdot \cos \gamma|^2, \\ \mathfrak{S}_{II} = |a_1 \cdot \cos \gamma - a_2 \cdot \cos 2\gamma + v_1|^2. \end{cases}$$

Hier sind  $a_1, a_2, v_1$  die Größen, deren Werte aus den Tab. I, II, III zu entnehmen sind. Durch graphische Interpolation findet man aus diesen Tabellen:

$$\begin{array}{ll} 2\varrho = 160 \mu\mu & 180 \mu\mu \\ a_1 = -0,08 - i \cdot 0,63 & -0,03 - i \cdot 0,47 \\ a_2 = 0,15 - i \cdot 0,22 & 0,12 - i \cdot 0,30 \\ v_1 = 0,09 + i \cdot 0,03 & 0,09 + i \cdot 0,03 \end{array}$$

für  $\lambda = 550 \mu\mu$ .

Setzt man dies in (97) ein, so gibt  $\mathfrak{S}_I + \mathfrak{S}_{II}$  die Gesamtstrahlung in ihrer Abhängigkeit vom Winkel  $\gamma$ ,  $\mathfrak{S}_I - \mathfrak{S}_{II}$  den Überschuß des polarisierten Lichtes über das unpolarisierte,  $P = (\mathfrak{S}_I - \mathfrak{S}_{II})/(\mathfrak{S}_I + \mathfrak{S}_{II})$  ist der prozentuale Gehalt an polarisiertem Licht. Da es uns nur auf relative Werte ankommt, habe ich die einzelnen Werte  $\mathfrak{S}$  durch  $(\mathfrak{S}_I + \mathfrak{S}_{II})_{90^\circ}$  dividiert; d. h. ich habe alles auf die unter  $\gamma = 90^\circ$  stattfindende Strahlung als Einheit bezogen. Die berechneten Zahlen sind:

$2\varrho = 160 \mu\mu$						
	$0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
Gesamte Strahlung	0,64	0,67	0,75	0,88	0,97	1,00
Polarisiert	0	0,02	0,06	0,18	0,44	0,62
$P$	0	0,03	0,09	0,21	0,46	0,62
	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$180^\circ$	
Gesamte Strahlung	1,06	1,35	2,01	2,76	3,17	
Polarisiert	0,80	0,97	0,72	0,29	0	
$P$	0,76	0,72	0,36	0,10	0	
$2\varrho = 180 \mu\mu$						
	$0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
Gesamte Strahlung	0,12	0,17	0,37	0,68	0,95	1,00
Polarisiert	0	-0,02	-0,10	-0,15	+0,06	0,31
$P$	0	-0,11	-0,27	-0,22	+0,06	0,31
	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$180^\circ$	
Gesamte Strahlung	1,04	1,33	2,16	3,30	3,85	
Polarisiert	0,62	1,10	0,65	0,35	0	
$P$	0,60	0,82	0,30	0,10	0	

In beiden Fällen ist das Maximum der Polarisation also von  $90^\circ$  nach der Seite des wachsenden  $\gamma$  verschoben, und zwar im einen Fall ( $2\rho = 160\ \mu\mu$ ) etwa nach  $\gamma = 110^\circ$ , im anderen Fall ( $180\ \mu\mu$ ) nach  $\gamma = 120^\circ$ . Daß gerade diese Winkel herauskommen, liegt wahrscheinlich an der speziellen

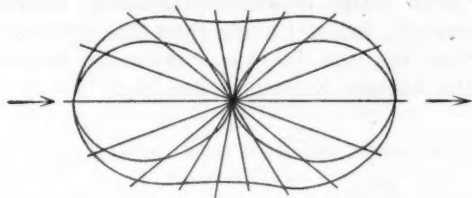


Fig. 17. Strahlungsdiagramm eines unendlich kleinen Goldkügelchens.

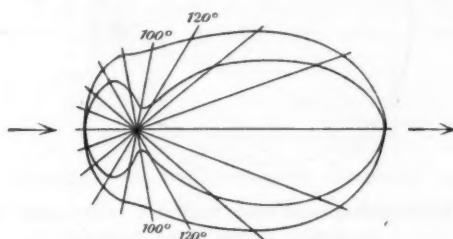


Fig. 18. Strahlungsdiagramm eines Goldkügelchens von  $160\ \mu\mu$  Durchm.

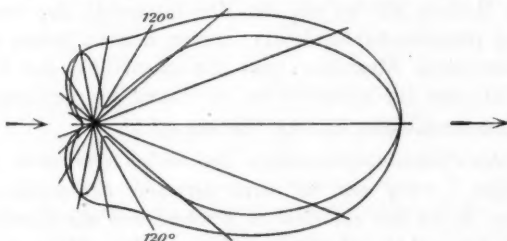


Fig. 19. Strahlungsdiagramm eines Goldkügelchens von  $180\ \mu\mu$  Durchm.

optischen Natur des Goldes, da für andere Metalle experimentell meistens kleinere Winkel gefunden worden sind. Das negative Vorzeichen vor einigen Zahlen im Falle  $2\rho = 180\ \mu\mu$  bedeutet, daß hier ein Überschuß von polarisiertem Licht vorhanden ist, das senkrecht zur Rayleighschen Strahlung schwingt.

Das Auffälligste an den gefundenen Zahlen ist aber die große Veränderlichkeit der Werte mit dem Strahlungswinkel. Es überwiegt bei den großen Teilchen ganz außerordentlich stark die Ausstrahlung nach der Seite hin, nach welcher der durch die Lösung gehende Lichtstrahl hingeht. Ich habe diese Verhältnisse durch einige Strahlungsdiagramme anschaulich zu machen versucht, indem ich die Intensität der Strahlung als Länge auf die von dem Teilchen ausgehenden Radienvektoren abtrug. Die äußeren Kurven in den Figg. 17—20 schneiden

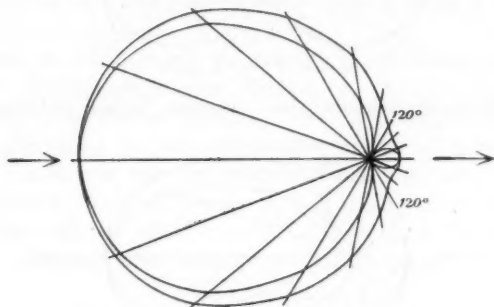


Fig. 20. Strahlungsdiagramm eines fingierten vollkommen leitenden, unendlich kleinen Kugelhens.

von den Radien Stücke ab, die der Intensität der gesamten Strahlung proportional sind, die inneren Kurven geben ebenso die unpolarisierte Strahlung, das Zwischenstück des Radiusvektors ist also der polarisierten Strahlung proportional.

Zusammenfassend können wir sagen:

*Ist das Polarisationsmaximum des seitlich zerstreuten Lichtes einer trüben Lösung von  $90^\circ$  nach der Seite der wachsenden  $\gamma$  verschoben, so ist das ein sicheres Zeichen, daß die Lösung sehr grobe Teilchen enthält. Zugleich muß dann die seitliche Strahlung nach der Seite hin, nach welcher der sie erregende Lichtstrahl geht ( $\gamma > 90^\circ$ ) ganz außerordentlich viel intensiver sein, als nach der anderen Seite ( $\gamma < 90^\circ$ ).*

Ich habe zum Vergleich noch das Strahlungsdiagramm für sehr feine Teilchen, und auch das für sehr feine Teilchen eines fingierten vollkommenen Leiters konstruiert (Figg. 17, 20).

Sieht man das letztere an, so bemerkt man, daß die Intensitätsverhältnisse gerade die umgekehrten sind, wie bei den groben Goldteilchen. Sollte also noch irgend ein Zweifel möglich sein,

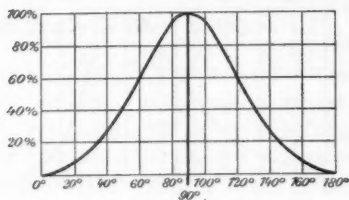


Fig. 21. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei unendlich feinen Teilchen.

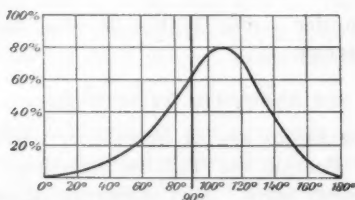


Fig. 22. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei der Teilchengröße 160  $\mu$ .

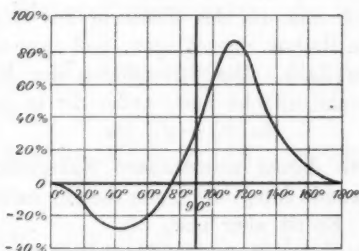


Fig. 23. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei der Teilchengröße 180  $\mu$ .

daß die hier gebrachte Erklärung der von Herrn F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> und Herrn E. Müller<sup>2)</sup> beobachteten Polarisationserscheinungen richtig ist, so könnte man die Frage durch Ver-

1) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 11. p. 489. 1903.

2) E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 1. 1907.

gleichung der unter verschiedenen Winkeln ausgestrahlten Intensitäten wahrscheinlich schon mit bloßem Auge sehr leicht entscheiden.

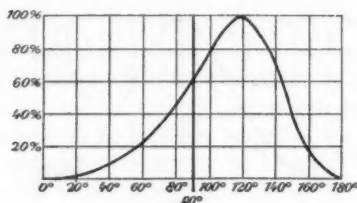


Fig. 24. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes von fingierten vollkommen leitenden, unendlich feinen Teilchen.

Die Kurven der Größe  $P$  (Fig. 21—24) bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

#### Die Absorption trüber Medien.

26. Um die Absorption zu berechnen, werden wir untersuchen, wieviel Energie ein Teilchen verzehren würde, wenn es allein vorhanden wäre. Den Absorptionskoeffizienten der Lösung bekommt man daraus durch Multiplikation mit der Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter.

Wir denken uns um das Zentrum des Kugelchens eine Kugelfläche vom Radius  $r$  geschlagen, und zwar sei  $x = 2\pi r/\lambda$  eine sehr große Zahl. Die Stromdichte des Energiestromes durch diese Kugeloberfläche nach außen ist in jedem Moment:

$$\mathfrak{E}_\phi \cdot \mathfrak{H}_\varphi - \mathfrak{E}_\varphi \cdot \mathfrak{H}_\phi.$$

Wir müssen nun diesen momentanen Energiestrom über die Dauer einer Sekunde integrieren, um die Intensität des Lichtes zu bekommen. Es ist aber nach (2):

$$\mathfrak{E}_\phi = \Re [E_\phi \cdot e^{2\pi i n t}], \quad \mathfrak{H}_\phi = \Re [H_\phi \cdot e^{2\pi i n t}] \text{ usw.}$$

$\Re []$  gleich: „reeller Teil von“. Setzt man dies ein, so bekommt man das gesuchte Zeitintegral:

$$\int_{t=0}^{t=1} (\mathfrak{E}_\phi \cdot \mathfrak{H}_\varphi - \mathfrak{E}_\varphi \cdot \mathfrak{H}_\phi) \cdot dt = \frac{1}{2} [(E_\phi \cdot H_\varphi) - (E_\varphi \cdot H_\phi)].$$

Es soll hier durch die runden Klammern angedeutet werden, daß das „skalare Produkt“ der beiden komplexen

Faktoren zu bilden ist, d. h. das Produkt der beiden absoluten Beträge mit dem Kosinus der Phasendifferenz. Ist:

$$E_{\phi} = E'_{\phi} + i \cdot E''_{\phi}, \quad H_{\varphi} = H'_{\varphi} + i \cdot H''_{\varphi},$$

wo  $E'_{\phi}$ ,  $E''_{\varphi}$  usw. reelle Größen bedeuten sollen, so ist:

$$(E_{\phi} \cdot H_{\varphi}) = E'_{\phi} \cdot H'_{\varphi} + E''_{\phi} \cdot H''_{\varphi}.$$

Da für die skalare Multiplikation zweier Größen genau dieselben Regeln gelten, wie für die gewöhnliche Multiplikation, so wollen wir im folgenden die runden Klammern einfach weglassen. Wo zwei komplexe Größen  $E$  und  $H$  miteinander multipliziert werden, soll im folgenden stets das skalare Produkt gemeint sein. Wir können nach (4) die komplexen Größen  $H_{\phi}$  und  $H_{\varphi}$  ersetzen durch  $i \cdot M_{\phi}$  und  $i \cdot M_{\varphi}$ . Die Intensität der normalen Komponente des durch die Kugeloberfläche hindurchtretenden Lichtes ist dann bis auf einen Zahlenfaktor:

$$E_{\phi} \cdot i M_{\varphi} - E_{\varphi} \cdot i M_{\phi}.$$

Dieser Zahlenfaktor ist so gewählt, daß die Intensität des durch die Lösung hindurchgehenden Strahles gleich 1 ist. Wir haben für  $E_{\phi}$ ,  $M_{\varphi}$  usw. aus (51) und (52) die Werte  $E_{\phi} + E_{\phi a}$ ,  $M_{\varphi} + M_{\varphi a}$  usw. einzusetzen. Es zerfällt dann das Integral über die Kugelfläche, das die gesamte Lichtmenge darstellt, die durch die Kugelfläche nach außen geht, in drei Teile:

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (E_{\phi} \cdot i M_{\varphi} - E_{\varphi} \cdot i M_{\phi}) \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi,$$

$$II = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (E_{\phi a} \cdot i M_{\varphi} + E_{\phi} \cdot i M_{\varphi a} - E_{\varphi a} \cdot i M_{\phi} - E_{\varphi} \cdot i M_{\phi a}) r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi,$$

$$III = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (E_{\phi a} \cdot i M_{\varphi a} - E_{\varphi a} \cdot i M_{\phi a}) r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi.$$

Teil I enthält den Energiestrom des durchgehenden Lichtstrahles, wenn er durch das Partikelchen gar nicht beeinflußt würde, es ist von vornherein klar, daß sich für I Null ergeben muß; Teil III ist eine positive Größe, nämlich der Gesamtbetrag der seitlich ausgestrahlten Energie, er gibt also auch den Teil des Absorptionskoeffizienten, der auf Rechnung der diffusen Strahlung zu setzen ist. Teil II ist negativ, nämlich

der ganze Energieverlust des durchgehenden Strahles, er gibt also den ganzen Absorptionskoeffizienten, der sowohl durch die diffuse Strahlung als auch durch die wirkliche Absorption strahlender Energie im Partikelchen bedingt ist.

Da wir angenommen haben, daß  $x = 2\pi r/\lambda'$  unendlich groß gegen 1 ist, so können wir nach (29a) und (19) setzen:

$$I_\nu(x) = \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad I'_\nu(x) = \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right);$$

$$K_\nu(-x) = e^{-ix}, \quad K'_\nu(-x) = -i \cdot e^{-ix}.$$

Führen wir ferner vorübergehend die folgenden Abkürzungen ein:

$$A_\nu = \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$B_\nu = -\frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^\nu \cdot \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$C_\nu = \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot e^{-ix},$$

$$D_\nu = -\frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot e^{-ix},$$

so ergibt sich für die Faktoren der zu berechnenden skalaren Produkte:

$$E_\vartheta + E_{\vartheta a} = \sum_1^\infty \frac{A_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} - \sum_1^\infty \frac{B_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi},$$

$$E_\varphi + E_{\varphi a} = \sum_1^\infty \frac{A_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \sum_1^\infty \frac{B_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta},$$

$$-i \cdot (M_\vartheta + M_{\vartheta a}) = \sum_1^\infty \frac{B_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \sum_1^\infty \frac{A_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta},$$

$$i \cdot (M_\varphi + M_{\varphi a}) = \sum_1^\infty \frac{B_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} - \sum_1^\infty \frac{A_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi}.$$

Die Lichtintensität selber berechnet sich nun:



$$\begin{aligned}
& (E_\vartheta + E_{\vartheta a}) \cdot i(M_\varphi + M_{\varphi a}) - (E_\varphi + E_{\varphi a}) \cdot i(M_\vartheta + M_{\vartheta a}) \\
&= \sum_v \sum_\mu \frac{(A_v + C_v)(B_\mu + C_\mu)}{r^3} \cdot \left( \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \right) \\
&- \sum_v \sum_\mu \frac{(A_v + C_v)(A_\mu + D_\mu) + (B_v + C_v)(B_\mu + D_\mu)}{r^3} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \\
&\quad \cdot \left( \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} \right) \\
&+ \sum_v \sum_\mu \frac{(B_v + D_v) \cdot (A_\mu + D_\mu)}{r^3} \cdot \left( \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \right).
\end{aligned}$$

Wir können nun die Integration über die Kugeloberfläche ausführen. Es ist:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_v \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial P_v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\vartheta \cdot d\varphi}{\sin \vartheta} &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_v \cdot \frac{\partial^2 P_\mu}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{d\vartheta \cdot d\varphi}{\sin \vartheta}.
\end{aligned}$$

Mit Benutzung der Gleichung (11) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial P_v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
= \mu \cdot (\mu + 1) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_v \cdot P_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi.
\end{aligned}$$

Also nach (46):

$$\begin{aligned}
&= 0, \quad \nu \neq \mu \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1}, \quad \nu = \mu.
\end{aligned}$$

Ganz dasselbe bekommt man, wenn man für  $P_v$ ,  $P_\mu$  substituiert  $\mathfrak{P}_v$ ,  $\mathfrak{P}_\mu$ . Endlich ist:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \vartheta} \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
= \int_0^{2\pi} \left[ P_v \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \varphi} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \cdot d\varphi - \int_0^\pi \left[ P_v \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \vartheta} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot d\vartheta = 0.
\end{aligned}$$

Der aus der Kugeloberfläche heraustretende Energiestrom ist demnach:

$$2\pi \cdot \sum_1^{\infty} ((A_\nu + C_\nu) \cdot (B_\nu + C_\nu) + (A_\nu + D_\nu) \cdot (B_\nu + D_\nu)) \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1}.$$

Dieser Ausdruck zerfällt nun in die oben besprochenen drei Teile:

$$I = 4\pi \cdot \sum_1^{\infty} (A_\nu \cdot B_\nu) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1} = 0,$$

$$\begin{aligned} II &= 2\pi \cdot \sum_1^{\infty} (A_\nu + B_\nu) \cdot (C_\nu + D_\nu) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1} \\ &= \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot (i e^{-i\pi} \times (a_\nu - p_\nu) e^{-i\pi}) \\ &= \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \Im \left( \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot (a_\nu - p_\nu) \right). \end{aligned}$$

$$III = 2\pi \cdot \sum_1^{\infty} (C_\nu^2 + D_\nu^2) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1} = \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}.$$

Ist die Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter  $N$ , so gibt II als Absorptionskoeffizienten der Lösung pro Millimeter:

$$(98) \quad k = N \cdot \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \Im \left( \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot (a_\nu - p_\nu) \right).$$

Der Verlust durch Strahlung allein beträgt pro Millimeter nach III:

$$(99) \quad k' = N \cdot \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}.$$

Das Symbol  $\Im$  in (98) bedeutet, das von der eingeklammerten komplexen Zahl der imaginäre Teil zu nehmen ist. Die senkrechten Striche in (99) bedeuten, daß von der zwischen ihnen stehenden Größe der absolute Betrag zu bilden ist.

## Absorption kolloidaler Goldlösungen.

27. Für die kolloidalen Lösungen können wir uns auf die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  beschränken. Wir wollen ferner, wie oben, die drei Größen

$$a_1 = \frac{a_1}{2\alpha^3}, \quad a_2 = -\frac{a_2}{2\alpha^3}, \quad p_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}$$

eingeführen. Da weiter die Konzentration der Lösung ist:

$$C = N \cdot V, \quad V = \frac{4\pi\varrho^3}{3} = \frac{\alpha^3 \cdot \lambda'^3}{6\pi^2},$$

so ergibt sich:

$$(100) \quad \begin{cases} k = C \cdot K, \\ K = \frac{6\pi}{\lambda'} \cdot \Im m(-a_1 - a_2 + p_1). \end{cases}$$

Die Größe  $K$  ändert sich bei sehr kleinen Teilchendurchmessern nur langsam, wenn die Teilchen größer werden.

*Bei sehr feiner Verteilung des Metalles in der Lösung ist die Farbe unabhängig von der Teilchengröße, der Absorptionskoeffizient ist der Konzentration der Lösung einfach proportional.*

Dieser Satz kann natürlich nur bis zu einer gewissen unteren Grenze in der Kleinheit der Teilchen Gültigkeit haben, da die Goldatome sich sicher optisch anders verhalten als kleine Goldkügelchen. Es wäre daher wahrscheinlich sehr interessant, die Absorption der Lösungen mit allerkleinsten amikroskopischen Teilchen zu untersuchen und gewissermaßen optisch den Vorgang zu verfolgen, wie sich die Goldteilchen aus den Atomen aufbauen.

Werden die Goldteilchen größer als etwa  $10\mu$ , so gilt der Satz nicht mehr. Ich habe aus den Tabellen I, II, III die Werte  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  genommen und mit ihnen für jede Farbe die Kurve konstruiert, die die Abhängigkeit der Absorption vom Teilchendurchmesser darstellt (ähnlich den Strahlungskurven in Fig. 12). Aus diesem Diagramm habe ich dann die Absorptionskoeffizienten für die in der folgenden Tabelle aufgeführten Teilchendurchmesser abgelesen. Die Zahlen sind in ganz derselben Einheit angegeben, wie oben (p. 421) die ausgestrahlte Energie. Sie bedeuten also den Lichtverlust auf dem Wege 1 mm durch eine Lösung von der Konzentration  $10^{-6}$  (1 cbmm Gold in 1 Liter Wasser), und zwar in Promille. Die Größe  $K$  bekommt man also aus ihnen durch Multiplikation mit  $10^3$ .

## Absorption kolloidaler Goldlösungen.

2 $\varrho$	420	450	500	525	550	600	650
0	40,5	37,4	59,6	69,0	55,5	16,4	7,0
20 $\mu\mu$	42,7	38,8	62,2	76,6	61,6	18,5	8,0
40 „	46,5	42,0	66,0	88,5	77,7	25,0	11,3
60 „	48,8	45,4	67,4	88,4	96,1	37,3	16,4
80 „	46,5	44,8	62,5	81,0	97,0	65,0	27,1
100 „	41,0	41,0	52,2	66,3	82,2	85,0	44,5
120 „	34,6	34,8	42,8	51,2	61,0	77,5	58,7
140 „	29,4	29,7	35,9	41,9	48,6	57,0	58,1
160 „	25,7	26,1	30,8	36,0	41,2	45,1	45,6
180 „	24,0	24,8	28,0	33,0	37,0	37,7	36,5

Diese Zahlenreihen sind in Fig. 25 graphisch wiedergegeben als die Absorptionsspektren bei verschiedenen Teilchengrößen.

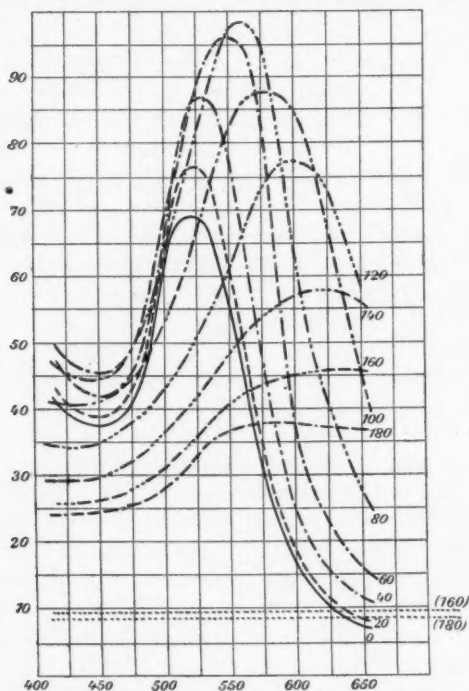


Fig. 25. Absorption kolloidaler Goldlösungen.

Man sieht bei feinen Verteilungen das bekannte steile Absorptionsmaximum der rubinroten Goldlösungen im Grün bei ca.  $525 \mu\mu$  Wellenlänge. Nimmt die Teilchengröße zu, so wächst bei konstanter Konzentration zunächst im ganzen Spektrum die Absorption, die Farbe ändert sich wenig, bekommt aber allmählich einen Stich ins bläuliche, indem das Maximum etwas nach rechts hin rückt. Eine starke Veränderung findet erst statt, wenn der Teilchendurchmesser ca.  $100 \mu\mu$  wird. Bei dieser Teilchengröße ist die Lösung violett. Bei 120 und 140 sehen wir schon die charakteristischen Spektren von tiefblauen Goldlösungen, bei 160 das einer indigo-blauen, bei 180 das einer grünlichblauen. Man bekommt also in der Tat bei veränderter Teilchengröße alle an den kolloidalen Goldlösungen beobachteten Farben.

28. Es ist von vornherein klar, daß die Farbe der Goldlösungen in erster Linie auf der eigentlichen Absorption des Lichtes in den Goldteilchen selber beruht. Mit vollkommen leitenden Teilchen würde man sie niemals beobachten. Hier würde der Lichtverlust ganz allein auf der seitlichen Lichtzerstreuung beruhen und die Absorptionskurven würden deswegen identisch sein mit den früher gezeichneten Strahlungskurven Fig. 15 (wenn man noch die den nächst höheren Partialwellen, also den Koeffizienten  $p_1, a_2, p_2$  entsprechenden Verluste hinzufügte). Diese Kurven sehen durchaus anders aus, wie die Absorptionskurven der Goldlösungen, sie würden stets nur ganz matte Farben darstellen, und bei unendlich feiner Verteilung wäre die Absorption überhaupt Null.

Indessen bestimmt bei größeren Teilchendurchmessern der Lichtverlust durch seitliche Ausstrahlung doch auch die Farbe der Goldlösungen mit. Die blauen Lösungen sind zugleich die, die eine starke rotgelbe Ausstrahlung zeigen. Es ist jedenfalls von Interesse, die beiden Summanden des Absorptionskoeffizienten auch einzeln zu berechnen. Für die praktische Rechnung ergibt sich aus (99) die Formel:

$$(101) \quad \begin{cases} k' = C \cdot K', \\ K' = \frac{4\pi}{k'} \cdot \alpha^3 \cdot \left( |a_1|^2 + |p_1|^2 + \frac{3}{5} \cdot |a_2|^2 \right) \\ \quad = \frac{24\pi^2}{k'^4} \cdot V \cdot \left( |a_1|^2 + |p_1|^2 + \frac{3}{5} \cdot |a_2|^2 \right). \end{cases}$$

Bis etwa  $2\rho = 100\mu\mu$  ist  $K'$  identisch mit der in 23. berechneten Größe  $F_1$  (Fig. 14). Bei größeren Teilchendurchmessern treten noch die Koeffizienten  $p_1$  und  $a_2$  hervor, obwohl die Rayleighsche Strahlung bis  $180\mu\mu$  doch noch immer überwiegt. Ich habe für die größeren Teilchen die Größen  $p_1$  und  $a_2$  durch graphische Interpolation aus den Tab. II und III gewonnen, und  $K'$  für dieselben Teilchengrößen berechnet, für die wir  $K$  schon kennen. Es ist dann

$$(102) \quad K'' = K - K'$$

das Maß für den in den Teilchen selbst verloren gehenden Bruchteil des Lichtes. In der folgenden Tabelle sind die so berechneten Werte von  $K''$ , wieder abgesehen vom Faktor  $10^3$ , aufgeführt.

Koeffizienten der reinen Absorption.

$2\rho$	420	450	500	525	550	600	650
0	40,5	37,4	59,6	69,0	55,5	16,4	7,0
20 $\mu\mu$	42,4	38,6	61,9	76,1	61,0	18,2	7,9
40 „	44,4	40,4	63,3	81,9	71,8	22,1	9,9
60 „	42,6	40,4	59,4	74,7	76,4	25,0	10,5
80 „	35,9	35,6	48,3	58,1	59,2	32,0	12,4
100 „	27,4	28,7	34,9	39,0	39,8	29,5	25,5
120 „	21,1	22,0	25,2	25,6	24,5	19,7	13,6
140 „	17,2	18,0	20,1	19,9	19,1	11,9	9,6
160 „	14,0	14,8	16,4	16,1	15,2	10,0	8,1
180 „	11,9	12,9	14,1	14,3	13,3	8,8	6,5

Diese Zahlenreihen sind in den Kurven der Fig. 26 graphisch dargestellt. Diese Kurven der reinen Absorption haben ihr Maximum stets im Grün zwischen  $\lambda = 525$  und  $\lambda = 550$ . Vergleicht man Fig. 26 mit Fig. 14, so ist immerhin ein gewisser Parallelismus zwischen Absorption und Ausstrahlung nicht zu verkennen. So steigt bei kleinen Teilchengrößen, wo die Ausstrahlung ihr Maximum noch im Grüngelb hat, die Ausstrahlung mit zunehmender Teilchengröße sehr schnell, die Absorption zeigt zugleich ein schwaches Anwachsen. Später geht, während das Maximum der Ausstrahlung nach rechts rückt, auch das Maximum der reinen Absorption ein wenig nach rechts, obwohl es stets im Grün bleibt. Aber zu diesen

verhältnismäßig geringfügigen Änderungen kommt eine andere, die offenbar nicht von der speziellen Natur des Goldes abhängt, und die schließlich alles andere überwiegt: Je gröber die Teilchen werden, je niedriger und flacher verlaufen die Kurven. Das ist auch von vornherein klar; denn wenn die Teilchen einigermaßen dick sind, so sind sie schließlich für alle Farben undurchsichtig, und je dicker sie werden, um so kleiner wird die Summe der schattenwerfenden Querschnitte.

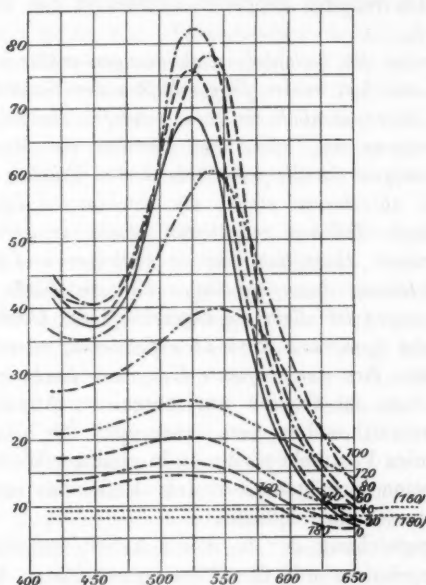


Fig. 26. „Reine Absorption“ in kolloidalen Goldlösungen.

Würde man die Wirkung der Beugung ganz außer acht lassen, also nur den geometrischen Schatten rechnen, so wäre der Absorptionskoeffizient  $k_0 = N \cdot q$ , wo bei der Konzentration  $10^{-6}$ :

$$N = \frac{10^{-6}}{\frac{4\pi}{3} \rho^3}, \quad q = \pi \cdot \rho^2,$$

also:

$$k_0 = N \cdot q = \frac{3}{4\rho} \cdot 10^{-6}.$$

So würde sich für  $2\rho = 180$  berechnen:  $k_0 = 8,3$  Promille, für  $2\rho = 160$ :  $k_0 = 9,4$  Promille. Ich habe diese beiden Werte  $k_0$  ebenfalls in den Figg. 25, 26 eingetragen, als gerade Linien natürlich, weil  $k_0$  von der Farbe nicht abhängt. Man sieht, daß die Beugung bewirkt, daß die Absorption beträchtlich viel größer wird. Ferner wird im Gelb und Rot bei weitem der größte Teil des Lichtes von den Teilchen durch Reflexion entfernt, während in der linken Hälfte des Spektrums ungefähr die Hälfte des verloren gehenden Lichtes in den Teilchen absorbiert wird.

*Die Farben der kolloidalen Goldlösungen erklären sich durch das Zusammenwirken zweier Eigenschaften der Goldteilchen. Die Goldteilchen haben nämlich ein recht scharfes Maximum des Absorptionsvermögens im Grün, und zweitens ein Maximum des Reflexionsvermögens im Rotgelb. Sehr kleine Teilchen reflektieren schwach und absorbieren stark, sie machen die Lösung daher rubinrot. Grobe Teilchen reflektieren stark, zugleich wird die Kurve der reinen Absorption für sie niedriger und flacher, sie machen die Lösung deswegen blau. Für die Farbe der allergrößten Lösungen ist allein die Eigenschaft des Goldes, den rotgelben Teil des Spektrums stark zu reflektieren, ausschlaggebend, dadurch kommt ihre weniger satte blaugrüne Farbe zustande.*

Dieser Satz ist freilich nur unter der Annahme kugelförmiger Partikelchen bewiesen. Aber auch für blättchen- und stäbchenförmige Partikeln wird man in analoger Weise zwischen dem Absorptionsvermögen und dem Reflexionsvermögen der Teilchen unterscheiden müssen.

Die Vergleichung der in dieser Arbeit enthaltenen theoretischen Ergebnisse mit den Messungsergebnissen behalte ich mir bis nach dem Erscheinen der Arbeit des Hrn. Steubing vor. Es sei aber schon hier ausgesprochen, daß aus diesen Messungen hervorzugehen scheint, daß in der Tat die bekannten optischen Eigenschaften des Goldes auch für die ultramikroskopischen Teilchen erhalten bleiben und zur Erklärung der optischen Eigenschaften der kolloidalen Lösungen völlig hinreichen, daß aber andererseits die Theorie doch noch einer Ergänzung bedarf, um alles zu erklären, und zwar wahrscheinlich, indem man sie weiter auch für ellipsoidische Teilchen (Blättchen oder Stäbchen) entwickelt.



## Resultate.

1. Das Problem, die optischen Eigenschaften trüber Medien zu berechnen, ist unter zwei vereinfachenden Annahmen gelöst: erstens, daß die Teilchen als kugelförmig angesehen werden dürfen, zweitens, daß die Trübung optisch unendlich dünn ist. Die zweite Annahme ist bei den gewöhnlichen kolloidalen Lösungen sicher zutreffend.

2. Das von den kleinen Teilchen ausgestrahlte Licht läßt sich als eine Reihe von „Partialwellen“ berechnen, und zwar gibt es zwei Gruppen von Partialwellen, die den elektrischen und den magnetischen Schwingungen der Teilchen entsprechen. Von diesen Partialwellen braucht auch bei noch so großen Teilchen nur eine endliche Zahl berücksichtigt zu werden, und zwar geht mit der  $\nu^{\text{ten}}$  elektrischen die  $(\nu - 1)^{\text{te}}$  magnetische Schwingung parallel.

Bei den kolloidalen Lösungen mit sehr feinen Teilchen hat nur die erste elektrische Schwingung, der die „Rayleighsche Strahlung“ entspricht, einen merklichen Betrag. Bei gröberen kolloidalen Lösungen tritt noch die zweite elektrische und die erste magnetische Schwingung hinzu.

3. Die Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit der Kugeln, die zu ganz unzulässigen Vereinfachungen der Formeln Veranlassung gibt, führt zu einem anderen Resultat, nämlich daß die  $\nu^{\text{te}}$  magnetische Schwingung mit der  $\nu^{\text{ten}}$  elektrischen parallel geht. Es müßte danach auch bei feinsten Trübungen außer der Rayleighschen Strahlung noch die erste magnetische Schwingung bemerkbar sein, und es würde sich dann der Thomsonsche Satz von dem Polarisationsmaximum bei  $120^\circ$  ergeben. Da die Voraussetzung falsch ist, kann man natürlich auch das Resultat nicht empirisch bestätigt finden.

4. Läßt man durch die trübe Lösung einen unpolarisierten Lichtstrahl gehen, so ist das seitlich ausgestrahlte Licht ganz oder teilweise linear polarisiert (niemals elliptisch polarisiert).

5. Bis zu einer Teilchengröße von ca.  $100 \mu$  ist das von Goldkügelchen seitlich zerstreute Licht fast nur die Rayleighsche Strahlung, die bei  $90^\circ$  ihr Polarisationsmaximum (und zwar 100 Proz.) hat. Werden die Teilchen größer, so wächst sehr schnell der Betrag des unpolarisierten Lichtes bei

90° und das Polarisationsmaximum rückt nach vorne, bei der Teilchengröße 160 und 180  $\mu\mu$  liegt es bei 110° und 120°. Zugleich wird durch die Interferenz der Partialwellen miteinander die anfängliche Symmetrie der Rayleighschen Strahlung gestört, bei weitem der größte Teil der diffusen Strahlung geht nach der Seite hinüber, nach welcher der erregende Lichtstrahl fortschreitet. In letzter Beziehung würde sich das von fingierten sehr kleinen, vollkommen leitenden Kügelchen reflektierte Licht gerade umgekehrt verhalten. Die großen Goldkügelchen, die diese anomalen Polarisationsverhältnisse zeigen, haben eine rotgelbe diffuse Strahlung und färben die Lösung blau. Es kann keine rotfärbenden Partikelchen geben, die sich so verhalten.

6. Bei konstant gehaltener Konzentration ist die diffuse Strahlung von sehr feinen Trübungen proportional mit dem Volumen eines Partikelchens. In größeren Trübungen wächst sie mit zunehmender Teilchengröße langsamer und erreicht schließlich ein Maximum, dessen Lage von der Wellenlänge abhängt. Und zwar ist in einer Trübung von fingierten vollkommen leitenden Kügelchen der Teilchendurchmesser, dem die maximale Strahlung entspricht, proportional der Wellenlänge (0,324  $\lambda$ ), bei Goldkügelchen gilt kein so einfaches Gesetz, doch liegt der betreffende Teilchendurchmesser immer zwischen  $\lambda/4$  und  $\lambda/3$ .

7. Die Farbe des diffus zerstreuten Lichtes ist bei den fingierten vollkommen leitenden Kügelchen, sowie überhaupt bei vollkommen weißen Kügelchen, wenn sie sehr klein sind, blauviolett, entsprechend dem Rayleighschen Gesetz (Strahlung proportional  $\lambda^{-4}$ ). Größere Kügelchen würden ein nahezu weißes Licht aussenden, mit einer schwachen, matten Färbentönung, die von der Größe des Teilchens abhängt. Eine optische Resonanz, die eine bestimmte Farbe kräftig heraushebt, ist, wenigstens bei kugelförmigen Teilchen, ausgeschlossen, und eine Erklärung der lebhaften Färbungen kolloidaler Lösungen durch Resonanz ist unmöglich.

8. Die diffuse Strahlung von Goldpartikelchen ist im allgemeinen viel stärker als die von gleich großen vollkommen leitenden Kügelchen sein würde. Außerdem zeigt sie bei den feinsten Verteilungen ein recht scharfes Maximum im Grün-

gelb. Später steigt das Strahlungsmaximum besonders hoch im Rotgelb. Wollte man von Resonanz sprechen, so müßte man schon von einer Resonanz der Goldatome auf Gelb sprechen, die sich über der an farblosen leitenden Partikelchen zu erwartenden Erscheinung überlagert.

9. Schon unendlich feine Trübungen durch Goldpartikelchen zeigen (im schärfsten Kontrast zu dem, was man von vollkommen leitenden Teilchen zu erwarten hätte) eine charakteristische Absorption, die nur von der Menge des suspendierten Metalls (der Konzentration), nicht aber von dem Feinheitsgrad der Verteilung abhängt. Es wäre interessant experimentell zu untersuchen, wie sich das schließlich bei äußerst feinen Teilchen, die nur noch einige Atome enthalten, ändern mag.

10. Allgemein hängt die Absorption der kolloidalen Goldlösungen von zwei Eigenschaften des metallischen Goldes ab: dem Absorptionsvermögen und dem Reflexionsvermögen. Lösungen, in denen die diffuse Reflexion zurücktritt gegen die eigentliche Absorption, zeigen das Absorptionsmaximum der Goldteilchen, das im Grün liegt, sie sind daher rubinrot. Lösungen, die starke diffuse Reflexion zeigen, sind dagegen blau-durchsichtig, weil Gold hauptsächlich das rotgelbe Licht reflektiert.

11. Für die Vollständigkeit der Theorie ist es unbedingt erforderlich, auch noch das Verhalten ellipsoidischer Teilchen zu untersuchen.

Greifswald, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 7. Januar 1908.)

**2. Der Empfang elektrischer Wellen in der  
drahtlosen Telegraphie;  
von Reinhold Rüdenberg.**

Während wir durch die Arbeiten von H. Hertz<sup>1)</sup>, J. J. Thomson<sup>2)</sup> und M. Abraham<sup>3)</sup> über den Mechanismus der Emission elektrischer Wellen, wie sie in der drahtlosen Telegraphie benutzt werden, im klaren sind, ist über die genaueren Energieverhältnisse bei der Absorption der Wellen in der Empfangsstation nicht sehr viel bekannt. Die Theorie des elektrischen Resonators ist zwar, außer von Hertz<sup>4)</sup> selbst, von einer Reihe von Autoren unter den verschiedensten Gesichtspunkten behandelt, jedoch sind gerade die speziellen Eigenschaften, die dem Resonator für drahtlose Telegraphie das charakteristische Gepräge geben, mehr oder weniger in den Hintergrund gestellt.

V. Bjerknes<sup>5)</sup> behandelt in seiner Theorie des Resonators den empfangenden Schwingungskreis nach der Methode der quasistationären Strömung und läßt dementsprechend auch die Rückwirkung dieses Kreises auf das Strahlungsfeld außer acht. J. J. Thomson<sup>6)</sup> und K. Schwarzschild<sup>7)</sup> geben die Lösung des Problems für eine spezielle Form des Resonators, nämlich für Kugeln, deren elektrischer Leitungswiderstand gleich Null ist. Für beliebige Leiterformen, deren Dimensionen jedoch klein gegen ihre Eigenwellenlänge sind, hat M. Planck<sup>8)</sup> unter derselben Einschränkung ein allgemeines

1) H. Hertz, Wied. Ann. **36**. p. 1. 1889.

2) J. J. Thomson, Recent Researches on Electr. and Magnet. Oxford, 1893. p. 361.

3) M. Abraham, Wied. Ann. **66**. p. 435. 1898.

4) H. Hertz, Wied. Ann. **34**. p. 155. 1888.

5) V. Bjerknes, Wied. Ann. **55**. p. 120. 1895.

6) J. J. Thomson, Recent Researches p. 437.

7) K. Schwarzschild, Münch. Ber. **31**. p. 293. 1901.

8) M. Planck, Wied. Ann. **57**. p. 1. 1896; **60**. p. 577. 1897; Physik. Zeitschr. **2**. p. 530. 1901.

Verfahren ausgearbeitet. Schließlich haben J. J. Thomson<sup>1)</sup> sowie W. Seitz<sup>2)</sup> und W. v. Ignatowski<sup>3)</sup> die vollständige Lösung des Problems gegeben für den Fall eines unendlich langen gestreckten Drahtes im Strahlungsfelde.

Für den Resonator der drahtlosen Telegraphie kommen drei Gesichtspunkte in Betracht, die beim Ansatz der Rechnung gleichzeitig berücksichtigt werden müssen, was bei den eben angeführten Lösungen, die meist andere Ziele verfolgten, nicht geschehen ist: das Empfangssystem hat eine oder mehrere ausgesprochene *Eigenschwingungen*, die es resonanzfähig für auffallende Wellen machen; es besitzt ferner einen gewissen *elektrischen Leitungswiderstand* — oder einen ähnlichen dissipativen Widerstand — der eine Umsetzung der im Resonator schwingenden elektrischen Energie in Wärme oder eine andere erkennbare Form bewirkt; schließlich übt es eine *Rückwirkung auf das ursprüngliche Strahlungsfeld* aus, weil die in ihm zirkulierenden Ströme elektromagnetische Wellen nach außen hin senden, die das anfängliche Feld stören.

Um eine strenge Formulierung des Problems zu erhalten, müßte man die nicht quasistationäre Stromverteilung im Innern des Empfangssystems in Ansatz bringen und auch auf die genaue Schaltung der Empfangsantenne Rücksicht nehmen. Wir wollen nun aber beachten, daß wir die nach *außen* in Erscheinung tretende Wirkung der nicht quasistationären Strömung bereits als Rückwirkung auf das Feld in der vom Resonator entsandten Wellenstrahlung zur Darstellung gebracht haben. *Wenn wir daher jetzt von einer weiteren Berücksichtigung der nicht quasistationären Strömung absehen, so verzichten wir damit nur auf eine genauere Kenntnis der Stromverteilung im Innern des Resonators, während sämtliche anderen Erscheinungen richtig wiedergegeben werden.*

Wir führen also einen idealen Ersatzstromkreis ein, einen äquivalenten Dipol mit endlichem Polabstande (Fig. 1), dessen Eigenschwingungszahl genau gleich der betrachteten des Empfangssystems ist, und dessen Stromstärke und Spannung

1) J. J. Thomson, Recent Researches p. 428.

2) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. p. 747. 1905; 19. p. 554. 1906.

3) W. v. Ignatowski, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1906.

den Mittelwerten am wirklichen System entsprechen. Die elektrischen Abmessungen der wirklichen Empfangskreise,

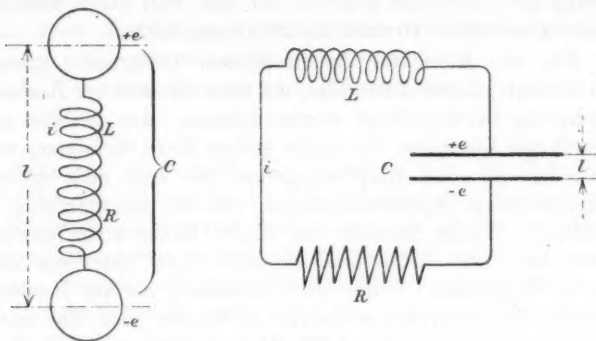


Fig. 1.

Fig. 2, reduziert man nach bekannten elementaren Regeln am besten auf den Antennenkreis, da dieser die Strahlungs-

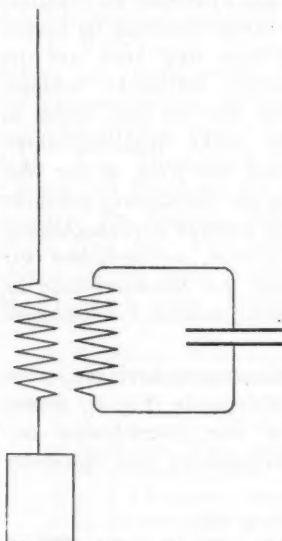


Fig. 2.

energie aufzunehmen hat. Die so gewonnene „mittlere Kapazität“, die „mittlere Selbstinduktion“ und der „mittlere Widerstand“ des Antennenkreises sind dann identisch mit der Kapazität  $C$ , der Selbstinduktion  $L$  und dem Widerstande  $R$  des Ersatzstromkreises oder Dipols, die in die weitere Rechnung eingehen.

Da die Strömung im Ersatzstromkreise quasistationär sein soll, so sind dessen Dimensionen notwendig klein gegen die Wellenlänge. Wir dürfen daher auch die Länge  $l$  des äquivalenten Dipols als klein gegen die Wellenlänge annehmen und erreichen dadurch den Vorteil eines ähnlich einfachen Rechnungsganges, wie ihn

M. Planck<sup>1)</sup> bei der Behandlung eines widerstandslosen Resonators angewandt hat. Lediglich des Zusammenhanges wegen sollen einige dazu erforderliche Überlegungen, die von M. Planck<sup>2)</sup> und M. Abraham<sup>3)</sup> stammen, hier kurz berührt werden.

Wir wollen die Energiebilanz unseres Resonators aufstellen, der von einem Zuge auffallender Wellen getroffen werden möge. Bezeichnet man mit  $e$  die Ladung des äquivalenten Dipols — oder der Kondensatorbelegung des Ersatzstromkreises —, Fig. 1, mit

$$(1) \quad i = \frac{de}{dt}$$

seine Stromstärke zur Zeit  $t$ , dann ist seine innere Energie

$$(2) \quad U = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} + \frac{1}{2} L \left( \frac{de}{dt} \right)^2$$

und deren sekundliche Änderung:

$$(3) \quad \frac{dU}{dt} = \frac{1}{C} e \frac{de}{dt} + L \frac{de}{dt} \frac{d^2e}{dt^2}.$$

Im Ohmschen Widerstande des Systems wird die Leistung

$$(4) \quad Q = Ri^2 = R \left( \frac{de}{dt} \right)^2$$

in Wärme umgewandelt. Diese, sowie die den auffallenden Wellen entnommene, und die durch elektromagnetische Ausstrahlung abgegebene Leistung bewirken die Änderung der inneren Energie.

Der Ladungsabstand des Dipols, oder seine Länge, sei  $l$ , und die elektrische Feldstärke der über ihn fortstreichenden primären Wellen, die eine periodische Funktion der Zeit ist, werde mit  $\mathcal{E}$  bezeichnet. In jedem Drahtelemente  $ds$  des Schwingungskreises wirkt dann eine treibende elektrische Kraft  $\mathcal{E} ds \cos \alpha$ , wenn  $\alpha$  den Winkel zwischen  $\mathcal{E}$  und  $ds$  bezeichnet, so daß die gesamte elektromotorische Kraft beträgt:

$$\int \mathcal{E} ds \cos \alpha,$$

erstreckt über die ganze Drahtleitung. Da die Abmessungen

1) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig, 1906. p. 113.

2) M. Planck, l. c.

3) M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig, 1905.

des Kreises klein gegen die Wellenlänge sind, so ist die Feldstärke  $\mathcal{E}$  in allen seinen Elementen merklich dieselbe und man darf sie daher vor das Integralzeichen setzen. Der Wert  $\int ds \cos \alpha$  ist aber nichts anderes, als der Abstand der Drahtenden, oder die Dipollänge  $l$ , gemessen in der Projektion auf die Richtung  $\mathcal{E}$ , denn die Beiträge aller übrigen Elemente heben sich gegenseitig fort. Wenn wir also unter  $\mathcal{E}$  die Komponente der äußeren Feldstärke in der Richtung  $l$  verstehen, dann wird die von den auffallenden Wellen auf den Schwingungskreis ausgeübte elektromotorische Kraft  $\mathcal{E} \cdot l$ , und dadurch wird eine Leistung

$$(5) \quad W_e = \mathcal{E} l i = \mathcal{E} l \frac{de}{dt}$$

aus dem Strahlungsfelde auf den Schwingungskreis übertragen.

Die Größe der vom Dipol ausgestrahlten Energiemenge ist zuerst von H. Hertz berechnet<sup>1)</sup>, sie beträgt<sup>2)</sup> in elektromagnetischen Einheiten:

$$(6) \quad \int W_a dt = \frac{2}{3} \frac{l^2}{c} \int \left( \frac{d^2 e}{dt^2} \right)^2 dt.$$

Dabei ist, wie oben, unter  $l$  der Ladungsabstand zu verstehen, ohne Rücksicht auf die sonstige Konfiguration des Schwingungskreises<sup>3)</sup>, weil sich auch hier die Beiträge aller übrigen Leiterelemente zur Strahlung aufheben.  $c$  bedeutet, wie üblich, die Lichtgeschwindigkeit.

Die Formel (6) kann man partiell integrieren und findet

$$\int \left( \frac{d^2 e}{dt^2} \right)^2 dt = \left[ \frac{de}{dt} \cdot \frac{d^2 e}{dt^2} \right] - \int \frac{de}{dt} \cdot \frac{d^3 e}{dt^3} dt.$$

Integriert man über eine beliebige Anzahl von Schwingungen, dann kann man stets die Integrationsgrenzen so wählen, daß das erste Glied, das um Null oszilliert, verschwindet. Die pro Zeiteinheit vom Dipol ausgestrahlte Leistung ist daher

$$(7) \quad W_a = - \frac{2}{3} \frac{l^2}{c} \frac{de}{dt} \frac{d^3 e}{dt^3},$$

worin der Faktor

$$(7a) \quad S = \frac{2}{3} \frac{l^2}{c}$$

nur von der Dimensionierung des Schwingungskreises abhängt.

1) H. Hertz, l. c.

2) Vgl. z. B. M. Planck, l. c. p. 107; M. Abraham, l. c. p. 66 u. 71.

3) M. Abraham, l. c. p. 293.



Dem Energieprinzip zufolge muß nun sein:

$$\frac{dU}{dt} + Q + W_a - W_e = 0,$$

und wenn man die Gleichungen (3), (4), (5) und (7) einsetzt und noch durch  $de/dt$  dividiert, dann erhält man daraus die Schwingungsgleichung für den Empfangsstromkreis:

$$(8) \quad \frac{1}{C} e + R \frac{de}{dt} + L \frac{d^2 e}{dt^2} - S \frac{d^3 e}{dt^3} = \mathcal{E} l.$$

Wenn die Art der eintreffenden elektrischen Wellen gegeben ist, dann ist die rechte Seite dieser Gleichung bekannt und ihre Lösung läßt sich daher leicht angeben. Der Einfachheit wegen wollen wir uns hier auf den Fall beschränken, daß ungedämpfte Wellenzüge über die Empfangsstation hinwegziehen und wollen nur den stationären Zustand betrachten. Der Fall gedämpft periodischer Schwingungen läßt sich mit etwas mehr Rechenarbeit nach genau demselben Schema erledigen.

Wir setzen also an:

$$(9) \quad \mathcal{E} = E \sin \omega t,$$

wo  $E$  der Maximalwert der elektrischen Feldstärke ist, die am Orte des Empfängers herrschen würde, wenn der Resonator gar nicht vorhanden wäre. Führt man die Eigenschwingungszahl desselben in  $2\pi$  Sekunden ein:

$$(10) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}},$$

dann schreibt sich die Lösung der Differentialgleichung (8):

$$(11) \quad e = \frac{El}{\sqrt{[L(\omega_0^2 - \omega^2)]^2 + [\omega(R + S\omega^2)]^2}} \sin(\omega t - \gamma),$$

worin die Phase  $\gamma$  durch die Beziehung bestimmt wird:

$$(12) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega(R + S\omega^2)}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Die Stromstärke im Empfangskreise berechnet sich daraus nach Gleichung (1) zu:

$$(13) \quad i = \frac{El}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)L\omega\right]^2 + [R + S\omega^2]^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

und die aus dem Strahlungsfelde absorbierte und in Wärme verwandelte Energie im zeitlichen Mittel zu:

$$(14) \quad Q = \frac{1}{2} (El)^2 \frac{R}{\left[ \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) L \omega \right]^2 + \left[ R + S \omega^2 \right]^2}.$$

Ein weiterer Energiebetrag wird vom Resonator zwar aus dem Strahlungsfelde aufgesaugt, er kann aber nicht nutzbar gemacht werden, sondern wird in alle Richtungen zerstreut. Seine Größe ist:

$$(15) \quad W_a = \frac{1}{2} (El)^2 \frac{S \omega^2}{\left[ \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) L \omega \right]^2 + \left[ R + S \omega^2 \right]^2},$$

oder auch

$$(15a) \quad W_a = Q \frac{S \omega^2}{R}.$$

Die Summe der absorbierten und zerstreuten Energie ist natürlich gleich der eingestrahnten, weil die innere Energie  $U$  im stationären Zustande im Mittel ungeändert bleibt. Man überzeugt sich davon auch leicht durch die Ausrechnung.

Als erstes Resultat der Rechnung erkennt man, daß sowohl die nutzbar absorbierte Energie  $Q$  als auch die zerstreute  $W_a$  ein starkes Maximum erreicht, wenn die Eigenfrequenz  $\omega_0$  mit der Frequenz im Strahlungsfelde übereinstimmt, wie das ja allbekannt ist. Indes ist zu beachten, daß die Lage des Resonanzmaximums nur dann dem Isochronismus entspricht, wenn die Eigenfrequenz des Resonators variiert wird, nicht aber, wenn die Frequenz der primären Wellen verändert wird, worauf bei der Messung von Wellenlängen nach der Resonanzmethode Rücksicht zu nehmen ist. Wir wollen für die folgenden Betrachtungen stets Isochronismus voraussetzen, der im praktischen Betriebe der drahtlosen Telegraphie immer eingestellt wird. Der Verlauf der Stromstärke im Empfangssystem nach Gleichung (13) stimmt genau überein mit den Gesetzen, die von Duddel und Taylor<sup>1)</sup> experimentell festgestellt wurden.

Für Isochronismus wird die Stromstärke:

$$(16) \quad i = \frac{El}{R + S \omega^2} \cos(\omega t - \gamma)$$

1) W. Duddel u. J. E. Taylor, Journ. of the Inst. of electr. Engineers 35. p. 321. 1905.

und die Joulesche Wärme im Mittel:

$$(17) \quad Q = \frac{1}{2} (El)^2 \frac{R}{(R + S\omega^2)^2}.$$

Man sieht also, daß außer dem Ohmschen Widerstande der Drahtleitungen noch ein Strahlungswiderstand für die Stärke der Ausbildung des Stromes maßgebend ist, der es bewirkt, daß selbst bei verschwindendem Leitungswiderstande die Stromstärke endlich bleibt, er wirkt genau so, wie ein gewöhnlicher in Serie geschalteter Widerstand. Die Größe des Strahlungswiderstandes ist nach Gleichung (7a):

$$(18) \quad S\omega^2 = \frac{2}{3} \frac{P^2 \omega^2}{c} = \frac{8\pi^2}{3} c \frac{P^2}{\lambda^2}$$

in absoluten elektromagnetischen Einheiten, wenn man statt der Frequenz  $\omega$  die Wellenlänge

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$$

der *erregenden* Schwingung einführt. Dividiert man noch durch  $10^9$ , dann erhält man ihn in Ohm zu:

$$(18a) \quad S\omega^2 = 80\pi^2 \frac{P^2}{\lambda^2}.$$

Es ist sehr zu beachten, daß dieser Strahlungswiderstand keine Konstante des Empfangssystems ist, sondern daß er außer von der äquivalenten Dipollänge  $l$  sehr stark von der Wellenlänge der auffallenden Strahlung abhängig ist. Will man daher bei strahlenden Systemen einwandfreie Frequenz- und besonders Dämpfungsmessungen machen, indem man eine Resonanzkurve aufnimmt, so muß man stets die primäre Frequenz konstant halten, und nur die Eigenfrequenz des Resonanzkreises variieren. Ein anderer Einfluß dieser Variabilität des Strahlungswiderstandes zielt dahin, daß die Beziehungen, die von Bjerknes<sup>1)</sup> für die Abhängigkeit der Resonanzeffekte von der Frequenz der Wellen aufgestellt sind, Abänderungen erleiden.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Maximalwert des Resonatorstromes, der sich bei verschwindendem Ohmschen

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 120. 1895.

Widerstande einstellen würde. Er ist nach Gleichung (16) und (7a):

$$(19) \quad J = \frac{El}{S\omega^2} = \frac{3}{2} \frac{cE}{l\omega^2},$$

also um so größer, je *kleiner* die Dipollänge  $l$  und besonders die Frequenz  $\omega$  gewählt wird. Nach der Bjerknesschen Theorie folgt bekanntlich gerade die entgegengesetzte Abhängigkeit.

Für die weitere Diskussion müssen wir die Feldstärke  $E$ , die in der Umgebung des Resonators herrscht, als gegeben ansehen. Sie richtet sich in Wirklichkeit nach der Art und Stärke der Sendestation, sowie nach der besonderen Beschaffenheit der von den Wellen bereits durchlaufenen Luftstrecken nebst den angrenzenden Teilen der Erdoberfläche.<sup>1)</sup> Auch die Größe der verwandten Wellenlänge und die Stärke der Erdkrümmung haben bedeutenden Einfluß auf die Intensität der Wellen. Alle diese Wirkungen sind jedoch sowohl theoretisch wie praktisch noch so ins Dunkel gehüllt, daß es unmöglich ist, sie bei einem Vergleich richtig gegeneinander abzuschätzen. *Aus dem Grunde beziehen wir alle Schlüsse auf konstante Intensität der eintreffenden Wellen.*

Bei der Verwendung eines Bolometers, oder eines ähnlichen die Energie messenden Detektors, wird die Stärke der

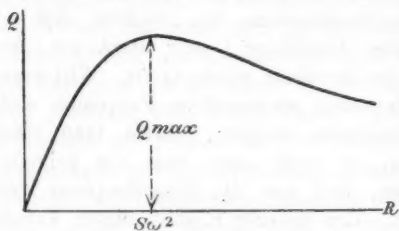


Fig. 3.

wahrnehmbaren Wirkung durch Gleichung (17) dargestellt, sofern der Widerstand der Drahtleitungen klein gegen den des Detektors ist, was natürlich stets anzustreben ist. Der Detektorwiderstand  $R$  selbst ist dann von

wesentlicher Bedeutung für die Empfangsintensität, sein Einfluß wird durch eine Kurve wie in Fig. 3 dargestellt. Das Maximum der Wirkung wird erreicht, wenn

$$(20) \quad R = S\omega^2$$

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 23. p. 846. 1907; M. Brylinski, Bulletin de la société internat. des Électriciens 6. p. 255. 1906.

ist, wenn somit der Detektorwiderstand genau gleich dem Strahlungswiderstande ist.<sup>1)</sup> Die nutzbar gemachte Energie beträgt dann:

$$(21) \quad Q_{\max.} = \frac{E^2 l^2}{8 R} = \frac{E^2 l^2}{8 S \omega^2}$$

oder wenn man den Wert des Strahlungswiderstandes nach Gleichung (7a) oder (18) einführt:

$$(21a) \quad Q_{\max.} = \frac{3}{16} \frac{E^2 c}{\omega^2} = \frac{3}{(8\pi)^2} \frac{E^2 \lambda^2}{c}$$

Dies ist der größte Betrag der Energie, der dem Strahlungsfelde durch einen einzelnen Resonator überhaupt entzogen werden kann. Genügt der Empfangskreis nicht der Widerstandsbedingung (20) und gleichzeitig auch der Resonanzbedingung  $\omega_0 = \omega$ , dann ist die aufgesaugte Energie stets beträchtlich kleiner als Gleichung (21a) angibt. Wie man auch aus Gleichung (15a) erkennt, ist im günstigsten Falle die absorbierte Energie ebensogroß wie die zerstreute. Die letztere würde bei widerstandslosem Resonator am größten sein, und zwar erreicht sie dann den vierfachen Betrag der maximal absorbierbaren.

Man erkennt jetzt aus dieser Beziehung das für die drahtlose Telegraphie wichtige Resultat, daß die größtmögliche Energieabsorption der Empfangsstation um so stärker ist, je größer die Wellenlänge der eintreffenden Strahlung ist. Die Länge des äquivalenten Dipols, die ein Maß für die wirksame Länge der Empfangsantenne gibt, ist ohne Einfluß auf die Stärke der Absorption. Diese merkwürdigen Ergebnisse, die die bisher üblichen Anschauungen stark modifizieren, lassen sich auch anschaulich leicht erklären, wenn man auf die Rückwirkung und Eigenstrahlung des Empfangssystems achtet und deren Abhängigkeit von der Frequenz berücksichtigt.

Kann man aus konstruktiven Gründen den Widerstand des Empfangssystems samt Detektor nicht unter einen bestimmten Wert reduzieren<sup>2)</sup>, dann erkennt man aus Gleichung (17), daß

1) Dieses Gesetz ist bereits von C. Tissot, *L'industrie électrique* 14. p. 161. 1906, sowie von W. Duddel u. J. E. Taylor, l. c., experimentell gefunden worden.

2) Es ist jedoch zu bedenken, daß man durch Einschaltung eines Energie liefernden Apparates (nach Physik. Zeitschr. S. p. 668. 1907) den Gesamtwiderstand beliebig klein machen kann.

eine große Wellenlänge, also geringe Schwingungszahl der eintreffenden Wellen immer noch große Vorteile bringen kann.<sup>1)</sup> Für die äquivalente Dipollänge ergibt sich jetzt ein bestimmter günstigster Wert, der aus Gleichung (17) leicht zu berechnen ist.

Benutzt man als Detektor ein Instrument, das nicht auf Energie, sondern auf Spannung anspricht, dann ergeben sich natürlich etwas modifizierte Schlüsse. Nach Gleichung (11) berechnet sich die bei Isochronismus herrschende Spannung an den Kondensatorbelegungen zu

$$(22) \quad v = \frac{e}{C} = \frac{E l}{C \omega (R + S \omega^2)} \sin(\omega t - \gamma'),$$

so daß man außer einer möglichst kleinen Kapazität *auch hier große Wellenlänge als günstig* für die Empfängerwirkung erhält. Der Ohmsche Widerstand sollte möglichst klein sein, und die günstigste Länge des äquivalenten Dipols ergibt sich genau wie oben zu

$$(23) \quad l = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{3R}{2c}}.$$

*Je kleiner man also den Widerstand der Schwingungskreise machen kann, um so geringere Dipollänge ist vorteilhaft anzuwenden.* Drückt man  $R$  statt im absoluten Maßsystem in Ohm aus, dann erhält man die Beziehung

$$(23a) \quad l = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{20}} = \frac{\lambda \sqrt{R}}{28,1},$$

eine Form, die zahlenmäßig sehr übersichtlich ist.

Da in sämtlichen Formeln für die Resonanzeffekte stets der Faktor

$$\frac{l}{R + S \omega^2} = \frac{l}{R + \frac{8\pi^2 c l^2}{\lambda^2}}$$

für den Einfluß der Dipollänge maßgebend ist, *so gilt die letzte Beziehung für deren günstigsten Wert ganz allgemein für sämtliche Arten von Detektoren.* Hat man z. B. einen nutzbaren Widerstand von 1 Ohm im Empfängerkreise, dann wendet man

---

1) Die Erfahrungen bei der Überbrückung großer Entfernungen scheinen die Forderung großer Wellenlänge auch aus anderen Gründen zu bestätigen (vgl. R. A. Fessenden, The Electrician 59. p. 486. 1907).

zweckmäßig ein Luftleitergebilde an, das eine äquivalente Länge von etwa  $\frac{1}{30}$  Wellenlänge besitzt.

Es muß nun untersucht werden, in welchem Zusammenhange die äquivalente Dipollänge  $l$  mit den Abmessungen der Empfangsantennen steht, wie sie in den Stationen der drahtlosen Telegraphie benutzt werden. Hätten wir, wie in Fig. 4, einen vertikalen Luftleiter in der Höhe  $A$  über dem Erdboden mit einer großen Kapazität belastet, dann würde im Empfangsdrahte selbst überall dieselbe Stromstärke herrschen, sofern durch die ankommenden Wellen nur die Grundschwingung des Systems erregt wird. Die Forderung der quasistationären Strömung, die wir an den Ersatzstromkreis stellen, ist dann also streng erfüllt, so daß die äquivalente Dipollänge ist:

$$l' = 2A,$$

wenn wir das System: Antenne nebst Spiegelbild unter der Erde als wirklich vorhanden annehmen. Da nun aber nur im Halbraume über der Erdoberfläche — die wir als sehr gut leitend ansehen — Energie aufgesaugt und zerstreut wird, also nur die Hälfte der Energie, die für den ganzen Dipol in Rechnung zu stellen wäre, so müssen wir mit einer äquivalenten Länge

$$(24) \quad l = \frac{l'}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} A$$

rechnen. Da die zerstreute Energie nach Gleichung (7) vom Quadrate der Dipollänge abhängt, so erhält man durch diese Festsetzung den richtigen Wert für dieselbe.

Recht nahe kommen den theoretischen Voraussetzungen auch die Schirmantennen, Fig. 5, die jetzt vielfach praktisch im Gebrauche sind. Man kann die Antennenlänge  $A$  etwa bis zur Mitte des Schirmdaches rechnen, da die im Schirme selbst nach unten fließenden Ströme eine Verminderung der Ausstrahlung des Vertikaldrahtes bewirken.

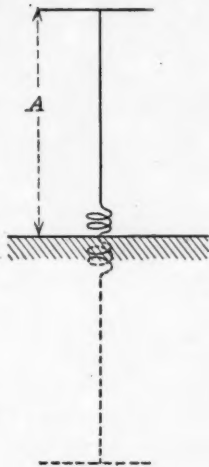


Fig. 4.

Am schlechtesten genügen die linearen Sender, Fig. 6, den Annahmen unserer Rechnung, da in ihnen keineswegs quasistationäre Strömung herrscht, sondern die Stromstärke vom Fuße nach der Spitze zu nach einem Sinusgesetze ab-

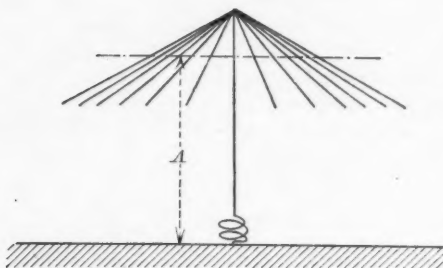


Fig. 5.

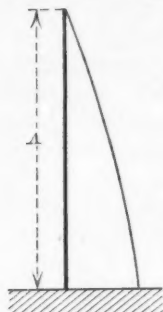


Fig. 6.

nimmt. Die einer solchen Antenne entsprechende äquivalente Dipollänge läßt sich dennoch sehr angenähert dadurch bestimmen, daß man den bekannten Wert der Energiestrahlung, der von M. Abraham<sup>1)</sup> bestimmt ist, mit dem rechnungsmäßigen Strahlungsverluste

$$S \omega^2 \cdot \frac{J^2}{2} = \frac{4\pi^2 c l^2}{3 \lambda^3} J^2$$

nach Gleichung (18) vergleicht, worin  $J$  die maximale Amplitude der Stromstärke bedeutet. Für eine lineare Antenne, die in ihrer Eigenperiode schwingt, also mit einer Wellenlänge

$$\lambda = 4A,$$

ist die mittlere sekundliche Energiestrahlung<sup>1)</sup> im elektromagnetischen Maßsystem:

$$\frac{1,22}{2} c J^2.$$

Man findet daraus ohne weiteres den Wert

$$(25) \quad l = \frac{\sqrt{6 \cdot 1,22}}{\pi} A = 0,860 A,$$

mit dem man jetzt in alle vorstehenden Rechnungen eingehen

1) M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung, p. 304.



darf. Der eigentliche Strahlungswiderstand einer solchen Antenne ergibt sich zu

$$S \omega^2 = 1,22 \cdot c \cdot 10^{-9} = 36,6 \text{ Ohm};$$

in dieser Größenordnung sollte also bei Energiedetektoren auch der auf die Antenne reduzierte nützliche Widerstand liegen, wenn man Viertelwellenantennen benutzt.

Auch ohne auf den genauen Ausdruck für die Strahlung, der durch Integration der Maxwell'schen Feldgleichungen erhalten ist, zurückzugreifen, kann man leicht zu einem angenäherten Werte für die Länge des idealen Dipols kommen. Man braucht nur zu bedenken, daß die elektromagnetische Strahlung sich in erster Linie nach dem von einem entfernten Punkte aus sichtbaren Integralwerte der Stromstärke längs des ganzen Leiters richtet. Multiplizieren wir also den Ausdruck (24), der für räumlich konstante Stromstärke gilt, wegen der sinusförmigen Stromverteilung noch mit  $2/\pi$ , dann erhalten wir den angenäherten Wert der äquivalenten Dipollänge für die lineare Antenne:

$$(25a) \quad l = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\pi} A = 0,897 A,$$

der nur um etwa 4,5 Proz. von dem genaueren abweicht. Innerhalb dieser Grenze von einigen Prozenten liegen überhaupt die Fehler, die man bei der Anwendung aller Rechnungen auf nicht quasistationäre Systeme begeht.

Der letzte angenäherte Rechnungsvorgang hat den Vorteil, daß man ihn auch auf lineare Antennen ausdehnen kann, deren Eigenwellenlänge durch Einschaltung von Selbstinduktion o. ä. künstlich vergrößert ist,

Fig. 7. Der Mittelwert der Stromstärke längs der Antenne ist dann in einem willkürlichen Maßstabe gegeben durch

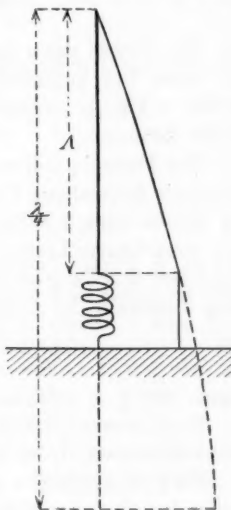


Fig. 7.

$$\frac{1}{A} \int_0^A \sin \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) dx = \frac{\lambda}{2\pi A} \left( 1 - \cos 2\pi \frac{A}{\lambda} \right),$$

während in der Selbstinduktion der Strom

$$\sin 2\pi \frac{A}{\lambda}$$

fließt, auf den sich die Rechnung bezieht. Die äquivalente Dipollänge wird demnach:

$$(26) \quad l = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{2}} \frac{1 - \cos 2\pi \frac{A}{\lambda}}{\sin 2\pi \frac{A}{\lambda}},$$

was für  $\lambda = 4A$  mit Gleichung (25a) übereinstimmt. Für Antennenlängen, die klein gegen ein Viertel der Wellenlänge sind, kann man die Funktionen in Reihen entwickeln und erhält, wenn man nur die ersten Glieder beibehält:

$$(27) \quad l = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,707 A.$$

Da der Strom dann geradlinig von der Antennenspitze aus bis unten hin zunimmt, die Ausstrahlung also halb so groß ist wie in Fig. 4, so hätte man das Resultat auch ohne weiteres finden können.

Die Formeln (24) und (27) geben die Grenzen an, zwischen denen die äquivalente Dipollänge bei den üblichen Ausführungen der Praxis liegt, sofern man gut strahlende Antennen benutzt und benachbarte Leiter im näheren Umkreise nicht vorhanden sind. Der Strahlungswiderstand wird daher nach Gleichung (18a) etwa innerhalb der Grenzen

$$(28) \quad S \omega^2 = (400 \text{ bis } 1600) \frac{A^2}{\lambda^3} \text{ Ohm}$$

liegen, worin  $A$  allgemein die Antennenlänge bezeichnet. Für die Energieausstrahlung von *Sendeantennen* gelten natürlich genau dieselben Gesetze.

Sind in der Nähe der Antenne andere Leitergebilde vorhanden, in denen sich unter der Wirkung der Wellen Ströme ausbilden können, dann stören diese in ihrer Umgebung das Feld stark, besonders, wenn sie einigermaßen in Resonanz mit der auftreffenden Strahlung stehen. Der Strahlungswiderstand der Antenne kann dadurch unter Umständen auf ein sehr geringes Maß herabgemindert werden, was sowohl für die Sendeleistung als für die Empfangsstation unvorteilhaft sein kann. Befindet

sich z. B. in der Nähe einer Sendeantenne ein geerdeter Draht von beträchtlicher Länge, ein eiserner Mast o. ä., dann werden in diesem Ströme induziert, die die entgegengesetzte Richtung wie die Antennenströme haben und die deren Fernwirkung daher zum großen Teile aufheben können.

Wir wollen untersuchen, bis auf welche Entfernungen der Einfluß eines sekundären Leiters im Strahlungsfelde bemerkbar ist, und stellen uns daher die Aufgabe, das Eigenfeld unseres Resonators mit der Feldstärke der primären Welle zu vergleichen.

Der Resonator befinde sich im Nullpunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems, sein Polabstand  $l$  weise nach der  $z$ -Richtung, und in der  $x$ -Richtung streiche ein Wellenzug über ihn fort, dessen elektrische Feldstärke ist

$$(29) \quad \mathcal{E}_z = E \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right).$$

Im stationären Zustande nimmt er dann nach Gleichung (11) die periodisch wechselnde Ladung an

$$e = f \sin (\omega t - \gamma),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$f = \frac{El}{\sqrt{[L(\omega_0^2 - \omega^2)]^2 + [\omega(R + S\omega^2)]^2}}.$$

Das Eigenfeld dieses Resonators ist am stärksten in der  $x$ - $y$ -Ebene, wo allein die  $z$ -Komponente der elektrischen Feldstärke vorhanden ist. Es ist nur vom Abstände  $r$  vom Nullpunkte abhängig, seine Größe ist nach Hertz<sup>1)</sup>

$$(30) \quad \mathcal{E}_z = f l \frac{\omega^3 \sqrt{1 - e^2 + e^4}}{e^3} \sin \left\{ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \gamma + \delta \right\},$$

worin  $\delta$  eine für uns unwesentliche Phase bedeutet, und das Verhältnis von Radiusvektor zu Wellenlänge dargestellt ist durch

$$(31) \quad \varrho = 2\pi \frac{r}{\lambda}.$$

Setzt man den Wert von  $f$  ein und formt den Ausdruck mit Hilfe von Gleichung (7a) noch etwas um, dann erhält man

1) H. Hertz, Wied. Ann. 36. p. 14. 1889. Der Ausdruck ist hier etwas bequemer geschrieben.

das Amplitudenverhältnis von sekundärer und primärer Welle in der Äquatorialebene zu

$$(32) \quad \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1 - \varrho^2 + \varrho^4}}{\varrho^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[ \frac{L\omega}{S\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right]^2 + \left[ 1 + \frac{R}{S\omega^2} \right]^2}}.$$

Man erkennt, daß die Störung des ursprünglichen Feldes um so stärker ist, je näher die Resonatorperiode dem Isochronismus kommt, sie befolgt das wohlbekannte Resonanzgesetz; ferner ist sie um so größer, je geringer sowohl der Ohmsche Widerstand  $R$ , als auch der induktive  $L\omega$  im Verhältnis zum Strahlungswiderstande  $S\omega^2$  ist. Ein Maximum erreicht die Störung bei Isochronismus und verschwindendem Ohmschen Widerstande, sie ist dann allein vom Verhältnis  $r/\lambda$  abhängig, erstreckt sich also um so weiter in den Raum hinein, je größer die Wellenlänge ist, ihr Wert ist in Fig. 8 abhängig von  $r/\lambda$  dargestellt. Für andere Resonanz-

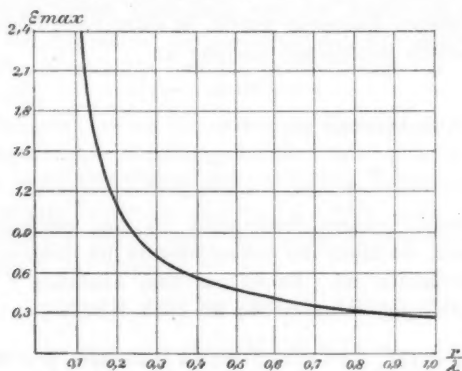


Fig. 8.

und Widerstandsverhältnisse braucht man diese Kurve nur mit dem letzten Faktor der Gleichung (32), der immer kleiner als 1 ist, zu multiplizieren.

Rechnet man den Störungsbereich so weit, daß an seiner Grenze nur noch eine Änderung der Feldstärken von 1 Proz. stattfindet, dann erhält man seinen Radius aus

$$\varepsilon = \frac{1}{100} = \frac{3}{2\varrho},$$

denn er ergibt sich so groß, daß man unter der Wurzel  $1 - \rho^2$  gegen  $\rho^4$  vernachlässigen kann. Man findet so den Störungsradius zu

$$(33) \quad r_s = \frac{300}{4\pi} \lambda \cong 24 \lambda,$$

so daß sich die Rückwirkung des Resonators auf das Feld bis auf eine größte Strecke von etwa 24 Wellenlängen bemerkbar machen kann. Ist der Resonator nicht widerstandslos, dann ist der Störungsradius kleiner, bei stärkster Energieabsorption aus dem Felde — wenn also Ohmscher Widerstand und Strahlungswiderstand einander gleich werden — beträgt er immerhin 12 Wellenlängen.

In Fig. 9 sind die elektrischen Kraftlinien in der Meridian- und Einfallsebene und in Fig. 10 die magnetischen Kraft-

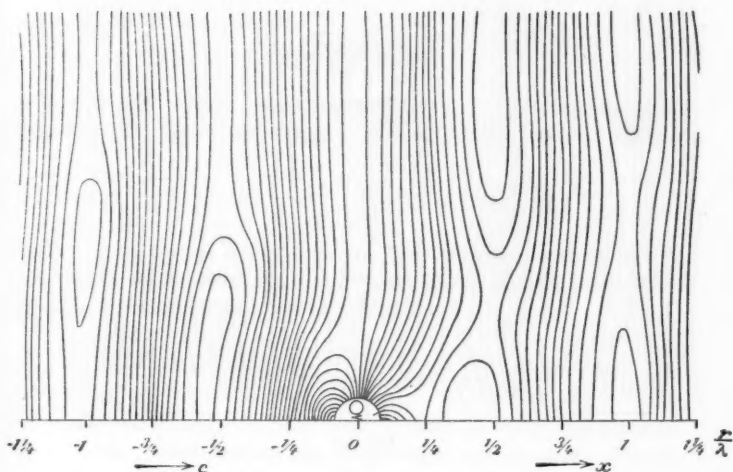


Fig. 9.

linien in der Äquatorialebene dargestellt, und zwar für den Fall, daß der Empfänger bei Resonanz die größtmögliche Energie aus dem Felde absorbiert, daß seine Phasenverzögerung gegen die primäre Schwingung also nach Gleichung (12)  $90^\circ$  beträgt.

Innerhalb des Störungsbereiches eines Empfängers interferieren die ankommenden und ausgesandten Wellen miteinander, was man an den letzten Figuren klar erkennen kann. Als Resultat dieser Interferenzen kommt einmal eine Energiewanderung aus dem Strahlungsfelde auf den Resonator hin zustande und außerdem eine Zerstreuung einer gewissen

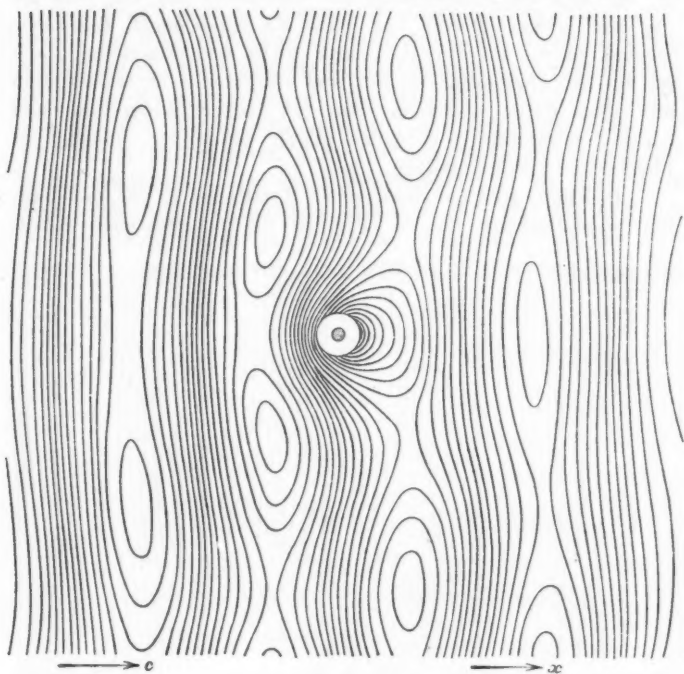


Fig. 10.

Energiemenge nach allen Richtungen, besonders entgegen der auffallenden Strahlung, also eine diffuse Reflexion. Hinter dem Empfänger tritt auf kurze Strecken hin eine Art Schattenbildung auf, da sich die primären und sekundären Feldstärken hier entgegenwirken, während sie sich in gemeinsamer Richtung fortpflanzen. Die Stärke der Schattenwirkung ist natürlich vom Widerstand und Resonanzverhältnis des Empfängers abhängig,

sie verschwindet schon im Abstände von wenigen Wellenlängen vom Resonator.<sup>1)</sup>

Es hat Interesse, die vom Resonator nutzbar absorbierte Energie zu vergleichen mit dem Energiestrom, der durch eine bestimmte Fläche im ungestörten Strahlungsfelde wandert, also vielleicht in weiteren Abständen vom Empfänger. Wir wollen die Größe derjenigen Fläche berechnen, durch die eine gleichgroße Energiemenge fließt, wie sie vom Resonator aus dem Felde aufgesaugt wird.

Nach dem Poyntingschen Satze ist der Energiestrom unserer primären Welle, die in der Nähe des Resonators als homogen betrachtet werden kann, in elektromagnetischen Einheiten pro Quadratcentimeter:

$$\frac{1}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \frac{1}{4\pi c} E^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{c} \right),$$

oder im zeitlichen Mittel:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi c} E^2,$$

während die nutzbar absorbierte Energie durch Gleichung (14) gegeben ist. Beide Leistungen werden gleich für eine Fläche

$$F = \frac{Q}{\mathfrak{E}} = 4\pi c \frac{R L^2}{\left[ \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) L \omega \right]^2 + \left[ R + S \omega^2 \right]^2}.$$

Formt man diesen Ausdruck noch mit Hilfe der Beziehung (18) um, dann erhält man für die Fläche, durch die die Resonator-energie hindurchgewandert ist, den Wert

$$(34) \quad F = \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \frac{R/S \omega^2}{\left[ \frac{L \omega}{S \omega^2} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right]^2 + \left[ 1 + \frac{R}{S \omega^2} \right]^2}.$$

Man sieht hier ganz klar, daß bei sonst gleichen Widerstands- und Resonanzverhältnissen im Empfänger um so mehr Energie aus dem Strahlungsfelde entzogen werden kann, je größer das Quadrat der Wellenlänge ist, was natürlich mit den früheren Überlegungen übereinstimmt. Die absolute Höhe der Antenne oder die Dipollänge ist wieder herausgefallen und demnach ohne Einfluß auf die absorbierte Energiemenge. Gleicht man auf Widerstand und Resonanz ab, dann wird der letzte Bruch

1) Vgl. hierzu M. Planck, Wied. Ann. 57. p. 12. 1896.

in Gleichung (34) gleich  $\frac{1}{4}$  und man erhält als größtmöglichen Radius der kreisförmigen Absorptionsfläche

$$(34a) \quad r_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda = 0,1946 \lambda.$$

Dieser Absorptionsradius von etwa  $\frac{1}{5}$  Wellenlänge ist natürlich bedeutend kleiner als der Störungsradius  $r_s$ , da die Absorption ja erst durch die Interferenzen der Wellen innerhalb des Störungsgebietes zustande kommt.

In Fig. 11 ist die Absorptionsfläche im Vergleich zu einer empfangenden Antenne dargestellt, die auf eine Viertelwellen-

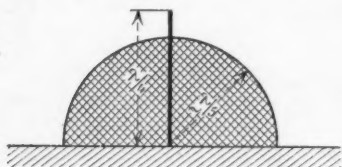


Fig. 11.

länge abgestimmt ist. Man übersieht, wie ungeheuer wenig Energie im Verhältnis zur ganzen vorhandenen von einem einzelnen Resonator aus dem Strahlungsfelde aufgesaugt werden kann, noch dazu nur mit einem Wirkungsgrade, der

50 Proz. niemals überschreiten kann, da im günstigsten Falle eine gleiche Energiemenge wie die absorbierte nutzlos zerstreut wird. Der Gedanke an die Möglichkeit einer rationellen Energieübertragung auf drahtlosem Wege erscheint nach diesen Rechnungen als völlig aussichtslos.

Göttingen, im Dezember 1907.

(Eingegangen 22. Dezember 1907.)



### 3. Über die sogenannten elektrolytischen Stromunterbrecher; von P. Ludewig.

(Auszug aus der gleichlautenden Göttinger Dissertation des Verfassers.)

(Hierzu Taf. III u. IV.)

#### I. Einleitung.

Die Wirkungsweise der sogenannten elektrolytischen Stromunterbrecher ist, trotz zahlreicher Arbeiten über den Gegenstand<sup>1)</sup>, bisher noch nicht abschließend erklärt. Namentlich ist auch noch keine endgültige Entscheidung zwischen den verschiedenen Theorien getroffen, die man aufgestellt hat, um die Einseitigkeit des Wehneltunterbrechers zu erklären.

Wehnelt<sup>2)</sup> selbst nahm anfangs an, daß an der Unterbrecherstelle eine Kapazität vorhanden sei, die zusammen mit der notwendigerweise im Kreise liegenden Selbstinduktion zu Schwingungen (d. h. den beobachteten Unterbrechungen) Anlaß gäbe. Später gab er diese Vorstellung auf zugunsten einer rein mechanischen Erklärung.<sup>3)</sup> Das durch Elektrolyse und Erhitzung durch den Stromdurchgang an der Anode gebildete Gas solle plötzlich den Strom abschließen, die Gasblase durch einen durch die Selbstinduktion bedingten Öffnungsfunken beiseitigt werden und so der Vorgang periodisch verlaufen.

Simon<sup>4)</sup> hat eine Theorie des Wehneltunterbrechers gegeben. Er nahm an, daß die den Strom abschließende Gasblase allein durch die Joulewärme erzeugt werde, die an der Einschnürungsstelle des Stromes besteht. Dieser Grundidee folgend kam er zur Konstruktion des Lochunterbrechers<sup>5)</sup>, in-

1) Eine Zusammenstellung der Literatur und eine Übersicht über die wesentlichsten Ergebnisse findet sich in der Dissertation.

2) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 233. 1899 und Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 1899. p. 53.

3) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 233. 1899.

4) H. Th. Simon, Nachr. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen Heft 2. p. 171. 1899 und Wied. Ann. 68. p. 272. 1899.

5) H. Th. Simon, Wied. Ann. 68. p. 860. 1899; Elektrotechn. Zeitschr. Heft 25. p. 440. 1899.

dem er die Stromeinschnürung an der Platinspitze durch eine Stromeinschnürung in der Durchbohrung eines Diaphragmas ersetzte. Seine Theorie führte zu der Formel<sup>1)</sup>

$$(3) C_1 = \frac{0,24 E^2}{w_u} \left[ T_1 - \frac{2 L}{w_u} \left( 1 - e^{-\frac{w_u}{L} T_1} \right) + \frac{L}{2 w_u} \left( 1 - e^{-\frac{2 w_u}{L} T_1} \right) \right].$$

Darin ist:

$C_1$  = Konstante,  
 $E$  = die Betriebsspannung,  
 $T_1$  = die Zeit des Stromanstieges,  
 $L$  = im Kreise vorhandene Selbstinduktion,  
 $w_u$  = Widerstand der Einschnürungsstelle.

Die Formel war abgeleitet unter der Voraussetzung, daß allein an der Einschnürungsstelle Ohmscher Widerstand im Kreise vorhanden sei.

Simon vernachlässigte in den Klammerausdrücken das zweite Glied gegenüber dem ersten und erhielt so nach kurzer Umformung die Formel

$$T_1 = \frac{3}{2} \frac{L}{w_u} + C \frac{w_u}{E^2} \quad \left( \text{wenn } \frac{C_1}{0,24} = C \right).$$

Klupathy<sup>2)</sup> ist dann auf Grund rechnerischer Überlegungen mit einer durchaus anderen Erklärung hervorgetreten. Seiner Meinung nach ist die Joulewärme nicht imstande, bei dem Stiftunterbrecher in den kurzen Zeiten eine Dampfblase zu bilden. Die dazu nötige Wärme soll ihren Grund in dem an der Übergangsstelle Platin-Schwefelsäure auftretenden Peltier-effekt haben. Für den Lochunterbrecher läßt er dagegen die Simonsche Theorie bestehen.

Die Einseitigkeit des Stiftunterbrechers hat verschiedene Erklärungen gefunden:

Simon<sup>3)</sup> glaubt die Erscheinung durch eine sekundäre Wirkung des im Falle der negativen aktiven Elektrode elektrolitisch abgeschiedenen Wasserstoffs erklären zu können.

1) Die Numerierung der Formeln, Tabellen und Figuren aus der Dissertation ist beibehalten.

2) E. Klupathy, Ann. d. Phys. 9. p. 147. 1902.

3) H. Th. Simon, Wied. Ann. 68. p. 272. 1899.

Stark und Cassuto<sup>1)</sup> fanden, daß ein Lichtbogen zwischen Metall und Flüssigkeit nur bestehen könne, wenn das Metall Kathode war. Sie nehmen an, daß beim Stiftunterbrecher, wenn der Platinstift Kathode ist, ein Lichtbogen einsetzt, der den Platinstift zerstört und so den Unterbrechungsvorgang unmöglich macht.

Klupathy endlich zieht auch hier den Peltiereffekt heran. Wenn der Platinstift Kathode ist, wird nach der Erscheinung des Peltiereffektes nicht Erwärmung, sondern Abkühlung eintreten und daher der Unterbrechervorgang aussetzen.

## II. Methode der Untersuchung.

Wie die vorstehend gegebene Übersicht zeigt, ist die Wirkungsweise der elektrolytischen Unterbrecher weder qualitativ noch quantitativ in allen Punkten aufgeklärt. Ich habe daher auf Anregung von Hrn. Prof. Simon unternommen, die Vorgänge messend zu verfolgen, die oben erwähnten Theorien umfassend zu prüfen und für die strittigen Fragen eine entscheidende Antwort zu finden.

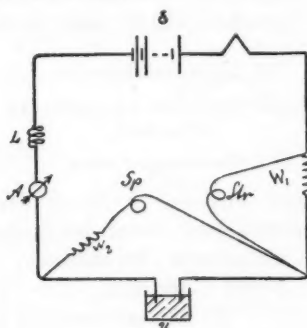


Fig. 6.

Die Verwendung des inzwischen zu hoher Vollkommenheit ausgebildeten Oszillographen gestattete, weit zuverlässigere und auch quantitativ allen Wünschen genügende Ergebnisse zu erzielen. Demnach habe ich folgende Versuchsanordnung benutzt. (Vgl. Schaltungsschema Fig. 6).

1) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 264. 1904.

In der Figur bedeutet:

- $E$  = Betriebsspannung, eine Akkumulatorenbatterie von 60—150 Volt,  
 $A$  = Hitzdrahtamperemeter,  
 $W_1$  = ein induktionsfreier Abzweigwiderstand, über dem die Stromschleife des Oszillographen abgezweigt wurde,  
 $W_2$  = ein vor die Spannungsschleife des Oszillographen geschalteter großer Regulierwiderstand,  
 $L$  = eine Selbstinduktionsspule,  
 $Sp$  = Spannungsschleife des Oszillographen,  
 $Str$  = Stromschleife des Oszillographen.

Verwendet wurde ein Hochfrequenzoszillograph von Siemens & Halske.

Um die Unterbrechungszeit in einfacher Weise jedesmal mit zu registrieren, diente folgende Vorrichtung: Ein von einem Uhrwerk getriebenes Speichenrad aus Aluminium von der Form der Fig. 7 wurde so in den Strahlengang der Oszillographenbogenlampe gestellt, daß die Speichen jedesmal für einen Moment das Licht von den Oszillographenspiegeln abblendeten.



Fig. 7.

### III. Lochunterbrecher.

- a) Druck und Temperatur des Elektrolyten werden nicht verändert.

#### 1. Versuchsanordnung.

Von den beiden Formen, in denen der elektrolytische Unterbrecher ausgeführt wird, bietet der Lochunterbrecher die einfacheren Verhältnisse, und er wurde zuerst untersucht.

Die von mir benutzte Form des Unterbrechers zeigt Fig. 8.

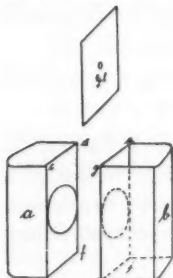


Fig. 8.

Die beiden Hälften  $a$  und  $b$  bildeten ursprünglich einen Glastrog, der zu meinen Versuchen durchgeschnitten war. Die dadurch entstandenen Ränder waren gut abgeschliffen. Auf die Seiten  $cdef$  und  $ghij$  wurden zwei Spiegelglasscheiben aufgekittet, in die je ein Loch von 40 mm Durchmesser

gebohrt war. Zwischen die beiden so konstruierten Gefäße wurde dann mit Gummidichtung eine besondere Glasplatte *Gl* gelegt, in die ein Loch von der gerade nötigen Größe gebohrt war. Die so getroffene Anordnung gestattete es, die Lochgröße schnell zu wechseln. Die Ränder des Loches in dem benutzten Glasblättchen, das eine Dicke von 0,8 mm hatte, nutzten sich für die Dauer der später mitgeteilten Versuchsreihen nicht ab. Der Lochunterbrecher erhielt gerade diese Form, da er für spätere Versuche so am besten zu handhaben war.

## 2. Theoretische Grundlagen.

Formel (3) ist für den Fall abgeleitet, daß nur an der Unterbrechungsstelle Ohmscher Widerstand im Kreise vorhanden sei.

Bezeichnet man dagegen mit

$w_u$  = den Unterbrecherwiderstand allein,

$w_k$  = den gesamten Widerstand des Kreises mit Einschluß des Unterbrechers,

$w = w_k - w_u$  = den Widerstand des Kreises ohne den Unterbrecher,

so kommt man zu der Formel:

$$(8) \quad C_1 = \frac{0,24 E^2 w_u}{w_k^2} \left[ T_1 - \frac{2L}{w_k} \left( 1 - e^{-\frac{w_k}{L} T_1} \right) + \frac{L}{2w_k} \left( 1 - e^{-\frac{2w_k}{L} T_1} \right) \right].$$

Vernachlässigt man

$$e^{-\frac{w_k}{L} T_1}$$

gegenüber 1, so erhält man

$$(9) \quad C_1'' = \frac{0,24 E^2 w_u}{w_k^2} \left( T_1 - \frac{3}{2} \frac{L}{w_k} \right).$$

## 3. Messung der vorkommenden Größen.

Die Größen der rechten Seite der Formel (9) lassen sich *E* am Voltmeter,  $w_k - w_u = w$  durch Widerstandsmessung, *L* durch Selbstinduktionsmessung mit Brücke und Variometer und *T* an den Zeitmarken der oszillographischen Aufnahmen messen.

$w_u$  wurde in der Brücke mit Wechselstrom und Telephon gemessen unter Verwendung platinierter Platinelektroden.

4. Versuchsergebnisse.<sup>1)</sup>

Die Tabellen 1 und 2 wurden dadurch erhalten, daß sowohl die Betriebsspannung, als auch die Selbstinduktion und damit der Widerstand meßbar geändert wurden. Trägt man die zu einer Unterbrechung nötigen Grammkalorien  $C_1$  als Funktion der Unterbrechungszahl  $n$  auf, so erhält man die in den Fig. 11 und 12 gezeichneten Kurven. (Vgl. Tab. 1 u. 2.)

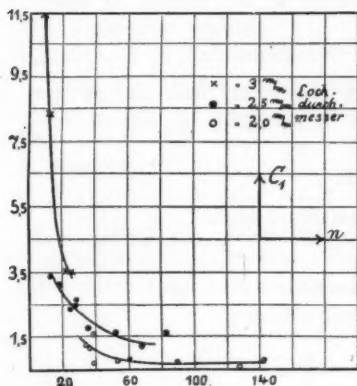


Fig. 11.

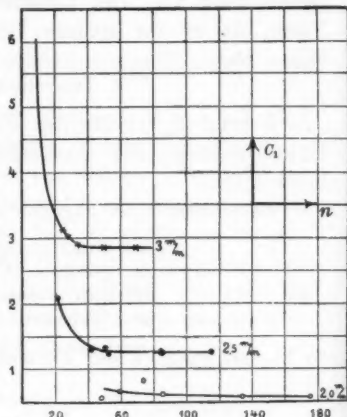


Fig. 12.

Sie zeigen, daß die Energie  $C_1$  bei genügend hoher Unterbrechungszahl tatsächlich konstant ist, daß aber bei Unterbrechungszahlen, die unter ca. 100 pro Sek. liegen, eine Abweichung von der Simonschen Annahme eintritt. Je geringer in diesem Bereiche der langsamen Unterbrechungen die Zahl derselben ist, desto mehr Energie ist nötig. Diese Erscheinung zeigte sich bei allen drei Lochgrößen in derselben Weise. Die Erklärung dieser Tatsache ist in der eintretenden Wärmeableitung zu suchen: der Betrag der abgeleiteten Wärme muß außer der Unterbrechungswärme aufgewendet werden. Daß diese Annahme das Richtige trifft, zeigt sich im folgenden: Wenn man die Temperatur des Elektrolyten erhöht, so muß der Einfluß der Wärmeableitung immer mehr verschwinden. Fig. 13

1) Sämtliche Beobachtungstabellen sind am Schlusse in Abschnitt VI zusammengestellt.

(vgl. Tab. 8) enthält die Resultate von Versuchen, die nach dieser Richtung hin unternommen sind. Es ist darin zwar nicht die ganze Kurve bei jeder Temperatur aufgetragen, sondern nur immer ein Wertepaar für jede Temperatur in solchem Intervall, daß der Einfluß der Wärmeleitung deutlich zutage tritt. Die zusammengehörigen Wertepaare sind durch gerade Verbindungslinien als zusammengehörig gekennzeichnet. Man sieht, daß die Kurven mit zunehmender Temperatur mehr und mehr die Abhängigkeit der Konstanten  $C_1$  von der Unterbrechungszahl verlieren. Bei  $90^\circ$  ist sie schließlich ganz verschwunden.

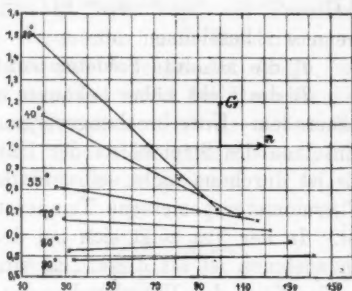


Fig. 13.

#### b) Temperatur und Druck werden verändert.

Bisher wurde stets dafür gesorgt, daß Temperatur und Druck des Elektrolyten bei allen Versuchen dieselben waren. Im folgenden wird die Abhängigkeit des Unterbrechungsvorganges beim Lochunterbrecher von Druck und Temperatur untersucht.

##### 1. Theoretische Grundlagen.

Es gilt  $C_1$  als Funktion von Temperatur und Druck darzustellen. Bei einem bestimmten Lochunterbrecher tritt die periodische Unterbrechung des Stromes immer dann ein, wenn ein bestimmtes Volumen  $v$  Wasserdampf gebildet ist, dessen Größe von der Gestalt des Loches abhängt. (Vgl. Fig. 15.)

Die zu einer Unterbrechung nötigen Grammkalorien haben die beiden folgenden Aufgaben zu erfüllen:

- I. muß die in  $v$  enthaltene Flüssigkeitsmenge bis zum Siedepunkte erhitzt werden;
- II. muß dies Volumen mit Dampf erfüllt werden.



Fig. 15.

I. Die Anzahl von Grammkalorien, welche die in  $v$  enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Siedepunkt erhitzt, bestimmt sich zu

$$(17) \quad q_1 = v (T_s - T_f) \cdot c,$$

wenn wir bezeichnen mit

$T_s$  die absolute Siedetemperatur der Flüssigkeit,

$T_f$  die nicht näher bekannte absolute Temperatur, die bei dauerndem Unterbrechungsvorgang jedesmal beim Wiedereinsetzen des Stromes an der Unterbrechungsstelle  $v$  herrscht. Es ist durchaus nicht selbstverständlich, daß dies die mittels Thermometer gemessene Temperatur der gesamten Flüssigkeit ist. In der Tat zeigt sich bei den Versuchen, daß  $T_f$  größer anzunehmen ist als diese. Es wird sich eben bei Dauerbetrieb in der Nähe der Unterbrechungsstelle höhere Temperatur einstellen,

$c$  die spezifische Wärme der Flüssigkeit. Dabei ist die Annahme gemacht, daß die spezifische Wärme der Flüssigkeit bis zum Siedepunkt konstant ist.

II. Ist jetzt das Volumen  $v$  mit Flüssigkeit von Siedetemperatur angefüllt, so muß ferner noch Energie verbraucht werden, um die Flüssigkeit in Dampf zu verwandeln. Es kommt also die Verdampfungswärme hinzu; und zwar ist das hier die sogenannte „ganze Verdampfungswärme“, in der auch noch die Energie enthalten ist, die nötig ist, damit der entstehende Wasserdampf den äußeren Druck zu überwinden imstande ist (im Gegensatz zu der „reinen Verdampfungswärme“, die nur die Umwandlung des Aggregatzustandes herbeiführt). Es wird nicht die gesamte in  $v$  befindliche Flüssigkeitsmenge verdampft, sondern nur so viel, daß der daraus entstehende Wasserdampf das Volum  $v$  erfüllt und dadurch den Strom unterbricht.

$$(25) \quad q_{II} = \frac{9 \cdot 0,089}{1000} \frac{p_t v_t^{(p_t)}}{p_0} \frac{273}{273 + t} (734 - 0,7 T).$$

Es ergibt sich hiernach, wenn man  $c = 1$  setzt,  $C_1$  als Funktion von Druck und Temperatur wie folgt:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= q_I + q_{II} \\ &= v_t^{(p_t)} (T_s - T_f) + v_t^{(p_t)} \frac{9 \cdot 0,089}{1000} \frac{p_t}{p_0} \frac{273}{T} (734 - 0,7 T). \end{aligned} \right.$$



## 2. Versuchsanordnung.

Die Versuchsreihen, die die Abhängigkeit des Lochunterbrechers von der Temperatur in Tab. 5—8 zeigen, wurden folgendermaßen erhalten. Ein größerer Topf mit Paraffinöl wurde langsam durch eine darunterstehende Gasflamme erwärmt. In diesem Bade, das gut durchgerührt wurde, um gleichmäßige Temperatur zu erhalten, stand der Unterbrecher. Bei der jeweils beabsichtigten Temperatur wurde die oszillo-graphische Aufnahme gemacht. Die Abhängigkeit vom Druck wurde mit dem Hilfsapparat (Fig. 16) aufgenommen.

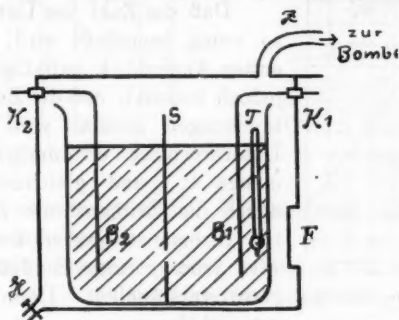


Fig. 16.

In einem festen Metallgefäß stand der Unterbrecher von dem bekannten Typus.  $B_1$  und  $B_2$  sind die beiden Bleielektroden,  $S$  die Scheidewand, in der sich die Einschnürungsstelle befindet. Die Zuleitungen zu den beiden Bleielektroden sind isoliert durch den Metalltopf hindurchgeführt und endigen in den Klemmen  $K_1$  und  $K_2$ . Durch das starke Glasfenster  $F$  war es möglich, das Thermometer  $T$  abzulesen und so die Temperatur konstant zu halten. Die Zuleitung  $Z$ , die aus einem dünnen Messingrohr bestand, führte zu einer mit komprimierter Luft von 10 Atm. gefüllten Bombe, an der sich ein Regulierventil mit Manometer befand. Dieses ermöglichte es, den jedesmal gewünschten Druck einzustellen. Sollte mit Unterdruck gearbeitet werden, so wurde diese Zuleitung mit einer Wasserstrahlpumpe und einem Quecksilbermanometer verbunden. Der Hahn  $H$  diente dazu, die Drucke außen und innen sich wieder ausgleichen zu lassen.

## 3. Versuchsergebnisse.

Die mit veränderter Temperatur und verändertem Druck aufgenommenen Versuchsreihen sind in den Tabbl. 5—8 enthalten. Man sieht:

*Die Unterbrechungszahl wird bei Erhöhung der Temperatur nur unwesentlich erhöht. Dagegen sinkt die zu einer Unterbrechung nötige Wärmemenge, wie ja zu erwarten ist, mit zunehmender Temperatur sehr stark (vgl. Fig. 17 u. Tab. 8).*

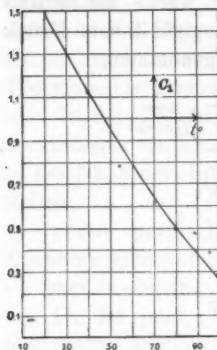


Fig. 17.

Daß die Zahl der Unterbrechungen so wenig beeinflußt wird, erscheint im ersten Augenblick auffällig. Wenn man jedoch bedenkt, daß die Zahl der Unterbrechungen einmal von der für die Unterbrechung erforderlichen Energiemenge  $C_1$ , und gleichzeitig von der durch die Zeitkonstante  $L/w_k$  definierten Stromanstiegkurve bestimmt wird, wird jener geringe Einfluß der Temperatur verständlich. Denn die Temperaturerhöhung verringert offenbar  $C_1$ ,

vergrößert jedoch die Zeitkonstante  $L/w_k$  ( $w_k$  wird kleiner), d. h. beide Einflüsse arbeiten sich entgegen. Will man demnach aus dem Vergleich der gemessenen Unterbrechungszahlen exakte Schlüsse ziehen, so geht das nur, wenn in den verglichenen Fällen die Zeitkonstante  $L/w_k$  dieselbe ist, der Strom also nach derselben Kurve ansteigt.

In der Tab. 8 sind neben  $C_1$  auch die Größen von  $C_1''$  gegeben, vgl. Formel (9). Man sieht, wenn man sie mit den aus der vollen Formel für  $C_1$  berechneten Größen vergleicht, daß man mit der vereinfachten Formel zu recht abweichenden Resultaten kommt. Die Abhängigkeit des  $w_k$  von der Temperatur wurde von 20°—100° mit Wechselstrom und Telefon in der Brückenschaltung bestimmt (vgl. Fig. 18).

Die aus dieser Kurve entnommenen Werte sind der Berechnung der  $C_1$  zugrunde gelegt. Bis 90° findet ein regelmäßiger Unterbrechervorgang statt, der erst bei 100° unregelmäßig wird.

Die Tab. 5—7 zeigen die Abhängigkeit des Unterbrechervorganges vom Druck. Fig. 20 gibt die Kurven, welche die

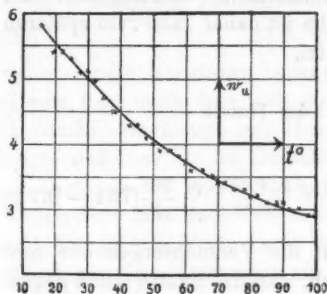


Fig. 18.

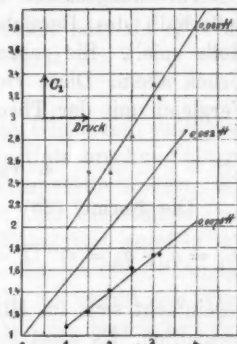


Fig. 20.

zu einer Unterbrechung nötige Energiemenge als Funktion des Druckes darstellen.

Fig. 21 zeigt die oben (p. 472) gefundene charakteristische Abhängigkeit des  $C_1$  von der Unterbrechungszahl, wie sie sich

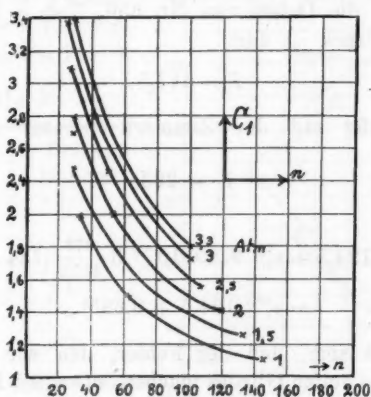


Fig. 21.

durch den Einfluß der Wärmeableitung erklärt. Die Kurven in Fig. 20 sind also eine Überlagerung der beiden

Einflüsse: Druck- und Wärmeableitung. Doch sind die mit 0,0076 Henry Selbstinduktion aufgenommenen Kurven mit den Unterbrechungszahlen von rund 140 pro Sek. genügend weit außerhalb des Bereiches, in dem die Wärmeableitung eine Rolle spielt. Sie geben also annähernd die Abhängigkeit vom Druck allein. Diese Versuchsreihe ist daher auch zum späteren Vergleich mit der Theorie benutzt.

#### 4. Vergleich mit der Theorie.

Die Formel (26)

$$C_1 = q_1 + q_{II} = v_i^{(p)}(T_s - T_7) + v_i^{(p)} \frac{9 \cdot 0,089}{1000} \frac{p_i}{p_0} \frac{273}{T} (734 - 0,7 T)$$

vereinfacht sich im Hinblick auf die Versuchsergebnisse sehr wesentlich. Es zeigt sich nämlich, daß das zweite Glied gegenüber dem ersten vollkommen vernachlässigt werden kann. Dasselbe stellt die Verdampfungswärme des zu verdampfenden Flüssigkeitsvolumens dar. *Das letztere ist gegenüber der gesamten in der Einschnürungsstelle zu erwärmenden Flüssigkeit so klein, daß jene Verdampfungswärme gegen die zur Erreichung des Siedepunktes benutzte Wärme verschwindet.* Um das zu beweisen, seien die Daten von Nr. 356, Tab. 5, herangezogen. Bei 3 Atm. Druck ist dort

$$T_s = 417,5.$$

$T_7$  sei vorläufig mit der Zimmertemperatur identisch angenommen.

$$T_7 = 293.$$

Dann wird

$$(24) \left\{ \begin{aligned} C_1 &= v_i^{(p)} 124,5 + v_i^{(p)} 9,89 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \frac{373}{417,5} (734 - 60,7 \cdot 417,5) \\ &= v_i^{(p)} (124,5 + 0,695). \end{aligned} \right.$$

Daraus ergibt sich, daß der Fehler, den wir bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes machen, etwa 0,5 Proz. ist. Nur bei der einen Nummer 229 aus Tab. 8, wo die Flüssigkeitstemperatur 100° C. ist, das erste Glied also relativ klein wird, erhält man einen Fehler von 3,7 Proz. In allen anderen Fällen ist er etwa 1—0,5 Proz.

Mit Vernachlässigung dieses zweiten Gliedes ergibt sich als Grundformel

$$(28) \quad C_1 = v_i^{(p)} (t_s - t_i),$$

wo jetzt mit  $t$  Celsiusgrade bezeichnet seien oder da  $v_i^{(p)}$  für einen bestimmten Lochunterbrecher konstant ist:

$$(29) \quad C_1 = A(t_s - t_i),$$

wenn  $A$  eine Konstante bedeutet. Diese Gleichung stellt das Gesetz dar, nach dem sich die zu einer Unterbrechung nötige Grammkalorienmenge mit Druck und Temperatur ändert. Sie zeigt, daß das  $C_1$  im Grunde nur von der Siedetemperatur abhängt, die in jedem Falle für die Flüssigkeit gegeben ist. Konstruiert man nach diesem Gesetz die Kurven der Abhängigkeit des  $C_1$  von Temperatur und Druck, so ergibt ein Vergleich mit den Messungen ein Urteil über die Richtigkeit der gemachten Annahmen. Nehmen wir den Fall der Druckänderung mit

$$t_i = 20^\circ \text{ also } \frac{C_1}{A} = (t_s - 20),$$

so findet man unter Berücksichtigung der Siedepunkte der Schwefelsäurelösung bei den verschiedenen Drucken die Tab. 9.

Tabelle 9.

$\frac{C_1}{A} = t_s - 20$	Druck in Atm.
88	1
110,2	2
124,5	3
135,6	4
144,5	5
152,5	6

Fig. 22 stellt diese Abhängigkeit des  $C_1/A$  vom Druck graphisch dar.

Für den Fall der Temperaturänderung bei kon-

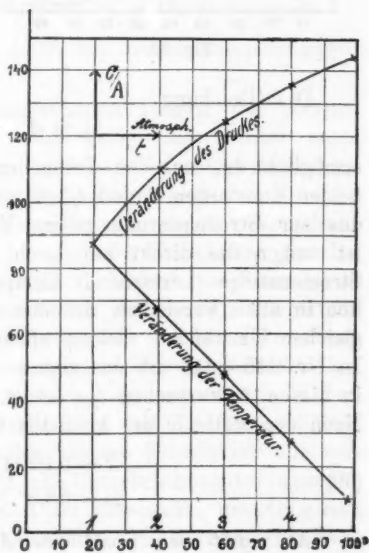


Fig. 22.

stantem Druck ( $p = 1$  Atm.) erhält man die Tab. 10 und damit die Kurve in Fig. 22. Mit diesen Kurven müssen die aus den Versuchsreihen entnommenen, analogen Kurven Ähnlichkeit haben, da  $C_1/A$  direkt dem  $C_1$  proportional ist. Die aus den Versuchen ermittelten Kurven sind in Fig. 23 gegeben. Sie haben einen völlig identischen Verlauf und bestätigen somit das gefundene Gesetz. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die aus den Messungen erhaltenen Kurven für Druck-

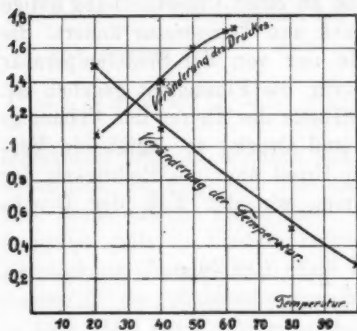


Fig. 23.

und Temperaturänderung mit verschiedenen Lochgrößen gemacht wurden.

Tabelle 10.

$\frac{C_1}{A}$	$t_1$
88	20
68	40
48	60
28	80
8	100

Die Gleichung

$$C_1 = A(t_s - t_1)$$

ermöglicht es, aus den Versuchen Nr. 345—349, Tab. 6, die beiden Konstanten  $A$  und  $t_1$  zu ermitteln, von denen die erste das zur Stromsperrung nötige Volumen des Wasserdampfes ist und  $t_1$  die direkt am Loch jedesmal beim Beginn des Stromanstieges herrschende Temperatur. Diese wird vermutlich in allen Versuchen dieselbe sein, bei denen unter sonst gleichen Umständen gleiche effektive Stromstärken bestehen. In Nr. 345—349 ist das ziemlich weitgehend erfüllt, so daß in diesen 5 Versuchen  $t_1 = \text{konst.} = B$  gesetzt werden kann. Nach der Methode der kleinsten Quadrate findet man

$$(30) \quad \begin{cases} A = 0,02042 \text{ cm}^3, \\ B = 58,8^\circ. \end{cases}$$

Es ergibt sich somit eine Anfangstemperatur von  $58,8^\circ$ , während die mittels Thermometer gemessene Flüssigkeitstemperatur

36° C. war. Die Flüssigkeit in der Nähe des Loches kühlt sich also nicht jedesmal wieder auf die übrige Flüssigkeitstemperatur ab, sondern es stellt sich eine Mitteltemperatur ein. Der notwendige Schluß hieraus ist der, daß beim Schließen des Stromes die erste Unterbrechung mehr Energie nötig haben muß, als die folgenden. Das zeigte sich in der Tat bei entsprechenden Versuchen bestätigt (vgl. Taf. III, Fig. 24).

Das Volumen  $A$  des zur Unterbrechung gebildeten Wasserdampfes ergibt sich zu

$$0,02042 \text{ cm}^3.$$

Die Versuche wurden mit einem Lochunterbrecher ausgeführt, der zwei Löcher besaß von der Größe  $r = 1,3 \text{ mm}$  ( $r = \text{Radius}$ ). Nimmt man an, daß eine volle Kugel von dem Radius  $r = 1,3 \text{ mm}$  mit Dampf erfüllt wird, so berechnet sich  $A = 0,018396 \text{ cm}^3$ , was mit dem oben gefundenen Werte recht gut übereinstimmt.

#### IV. Der Stiftunterbrecher.

##### 1. Vergleich der Unterbrechungszeiten beider Unterbrechertypen.

Die Versuchsanordnung blieb bei diesen Untersuchungen im wesentlichen dieselbe.

Aus der von Simon aufgestellten Theorie der elektrolytischen Unterbrecher folgt, daß beide Unterbrecher unter sonst gleichen Bedingungen gleiche Unterbrechungszahlen liefern müßten. Unter gleichen Bedingungen heißt hier: gleiche Betriebsspannung, gleiche Selbstinduktion, gleicher Vorschaltwiderstand und gleicher Widerstand der Einschnürungsstelle. In letzter Beziehung ist folgendes zu bemerken. Beim Lochunterbrecher liegen auf beiden Seiten der Einschnürungsstelle ganz symmetrische Verhältnisse vor, während bei Verwendung einer „aktiven Elektrode“ eine gewisse Einseitigkeit der Anordnung vorhanden ist. Da indessen der wesentliche Widerstand stets an der engsten Stelle liegt und bei der gewählten Anordnung die Widerstände der übrigen Flüssigkeitsteile verschwinden, so folgt, daß man gleiche Unterbrechungsbedingungen dann hat, wenn der Querschnitt der Einschnürungsstelle gleich ist, d. h. wenn der Lochquerschnitt des Lochunterbrechers gleich der Elektrodenoberfläche des Stiftunterbrechers ist.

Voraussetzung ist dabei, daß das Diaphragma, in welches das Loch eingebohrt ist, möglichst dünnwandig ist. Durch besondere Messungen in der Brücke habe ich mich überzeugt, daß in der Tat die Widerstände unter diesen Umständen nahezu gleich ausfallen.

Nun zeigt schon ein roher Versuch, daß der Stiftunterbrecher unter sonst gleichen Bedingungen häufiger unterbricht, als der Lochunterbrecher. Darauf weist unter anderem auch Klupathy in der zitierten Arbeit hin, und sieht darin eine wesentliche Stütze seiner Theorie. Da indessen bisher exakte Versuche über diesen Punkt noch nicht gemacht waren, so stellte ich zunächst solche Vergleichsversuche zwischen den beiden Unterbrecherformen an. Und zwar wurde zunächst ein Stiftunterbrecher der gewöhnlichen Form benutzt, dessen Stiftoberfläche dem Lochquerschnitt gleichgemacht war. Die Resultate sind in der Tab. 11 enthalten.<sup>1)</sup> Es zeigt sich, daß in der Tat wesentlich höhere Unterbrechungszahlen beim Stiftunterbrecher erhalten werden.

Da immerhin die Stiftform der Elektrode besonderen Einfluß auf die Unterbrechungszahl haben konnte, so wurde noch eine Versuchsreihe gemacht, bei der die Übereinstimmung der Bedingungen sicherlich noch besser erzielt ist. Zu dem Zweck wurde als „aktive Elektrode“ eine ebene Elektrode benutzt, die durch Anpressen von Platinblech an dasselbe Loch gebildet war, welches zu den Parallelversuchen am Lochunterbrecher diente. Die verwendeten Diaphragmen bestanden aus Glasplatten von 0,8 mm Dicke. Es wurde große Sorgfalt darauf verwendet, die Löcher genau zylindrisch mit scharfen Rändern zu bohren, damit von dem untergelegten Platinblech genau ein Stück von der Flächengröße des Lochquerschnitts ausgeblendet wurde. Die Resultate, die mit dieser Anordnung erhalten wurden, sind in Tab. 15 niedergelegt.

Auch sie ergeben dasselbe Resultat, daß nämlich unter gleichen Umständen der Elektrodenunterbrecher 3 bis 5 mal so oft unterbricht, wie der Lochunterbrecher. Als Beispiel ist auf Fig. 25, Taf. III, ein Paar der erhaltenen Kurven abgebildet.

1) Weitere Tabellen vgl. Dissertation p. 47.



Fig. 26 stellt die beiden Stromkurven nach quantitativer Auswertung dar. Man erkennt, daß der Stromanstieg in beiden Fällen dieselbe Zeitkonstante hat.

Weiter wurde eine Versuchsreihe gemacht, bei der die Größe des Loches konstant gehalten und die Länge des Platinstiftes so reguliert wurde, daß die gleiche Stromamplitude für beide Unterbrecher erhalten wurde. Man kann diese Einstellung mit Hilfe des rotierenden Spiegels am Oszillographen sehr leicht vornehmen.

Das Ergebnis ist in Tab. 16 enthalten.<sup>1)</sup>

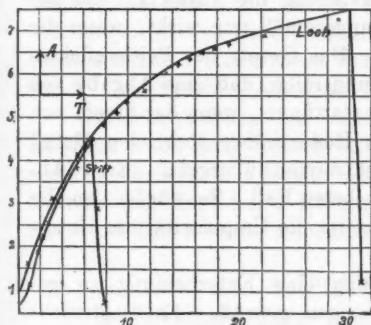


Fig. 26.

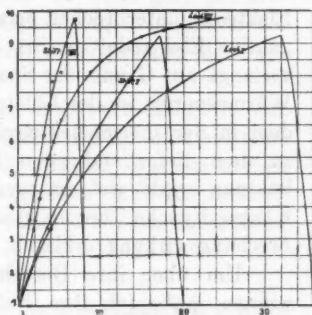


Fig. 27.

Fig. 27 zeigt zwei Paar quantitativ ausgewertete Kurven dieser Art. Da die maximale Stromamplitude beim Betriebe eines Induktoriums, gleiche Unterbrechungsgeschwindigkeit vorausgesetzt, ein Maß ist für die Induktionswirkung der Unterbrechung, so sieht man, daß der Elektrodenunterbrecher die gleiche Induktionswirkung in derselben Zeit etwa 3 mal leistet, in der der Lochunterbrecher einmal wirkt. Doch werden diese Verhältnisse durch die sekundäre Belastung des Induktoriums wesentlich modifiziert, worauf weiter unten näher eingegangen wird.

## 2. Kritik der Klupathyschen Theorie.

Nachdem so exakt bewiesen ist, daß der Wehneltunterbrecher unter gleichen Umständen häufiger unterbricht, als

1) Weitere Tabellen vgl. Dissertation p. 49—50.

der Lochunterbrecher, läßt sich die Übertragung der Simonischen Theorie, die sich beim Lochunterbrecher bestätigt hatte, auf den Stiftunterbrecher nicht mehr rechtfertigen. Dagegen scheint die von Klupathy vertretene Anschauung eine Stütze zu erhalten. Denn die Versuche beweisen, daß außer der an der Einschnürungsstelle als Joulesche Wärme abgegebenen Energie beim Elektrodenunterbrecher noch eine andere Energieabgabe stattfinden muß. Klupathy<sup>1)</sup> ist der Meinung, daß der Peltiereffekt an der Platin-Schwefelsäure-Berührungsstelle dafür verantwortlich gemacht werden müsse. Eng zusammen hängt mit dieser Klupathyschen Erklärung die Tatsache, daß der Elektrodenunterbrecher erfahrungsgemäß nur wirkt, wenn die „aktive Elektrode“ positiv ist. Das Gesetz des Peltiereffektes verlangt auf Grund der Spannungsreihe, daß eine Abgabe von Wärmeenergie an der Lötstelle stattfindet, wenn der Strom von dem in der thermoelektrischen Reihe höher stehenden Metall zu dem tiefer stehenden Elektrolyten übergeht. Eine Abkühlung ergibt sich im umgekehrten Fall. So würde also die Klupathysche Theorie gleichzeitig die Unipolarität der Unterbrechungswirkung erklären.

Um über ihre Berechtigung eine Entscheidung zu gewinnen, habe ich ihre Folgerungen geprüft. Es fragt sich:

1. *Ob bei negativer aktiver Elektrode der Unterbrechungsvorgang tatsächlich versagt, oder wenigstens die Unterbrechungen langsamer werden.*

2. *Ob bei Verwendung von anderen Metallen andere Unterbrechungszahlen auftreten.*

1. *Die Versuche zeigen, daß auch bei negativer, aktiver Elektrode wohl definierte Unterbrechungen stattfinden, die zwar offenbar aus sekundären Ursachen unregelmäßiger verlaufen, als im umgekehrten Falle, die aber nicht nur keine geringere Unterbrechungszahl, sondern sogar durchgehends eine größere liefern, als bei positiver Elektrode.* Die Abbildungen 36 und 37 (Taf. III) zeigen zwei Oszillogramme als Vergleich.<sup>2)</sup> Als charakteristisch und auffällig sei schon hier hervorgehoben, daß in diesem Falle die Spannung am Unterbrecher längst nicht so hohe Werte erreicht, auch unregelmäßiger verläuft, als bei positiver Elektrode.

1) E. Klupathy, Wied. Ann. 9. p. 147. 1902.

2) Vgl. auch Figg. 38 und 39 auf Taf. I der Dissertation.

In den Tab. 19 und 20 sind die Daten dieser Versuche zusammengestellt. Die Aufnahmen in Tab. 19 sind mit Platinblech, die in Tab. 20 mit Kohle als aktiver Elektrode gemacht; beide mit dem p. 470 beschriebenen Apparat. Für die Kohleversuche wurde eine Mikrophonmembran verwandt. Auch bei Kohle zeigt sich dasselbe, wie bei Platin, so daß die Klupathysche Auffassung zwingend widerlegt erscheint.

2. Die Versuche, andere Metalle als positive aktive Elektroden zu verwenden, stehen in Tab. 21, 22.<sup>1)</sup>

Sie zeigen, daß das verwendete Metall auf die Unterbrechungstätigkeit von keinem spezifischen Einfluß ist. Die geringen Abweichungen in den Unterbrechungszahlen liegen innerhalb der Versuchsfehler. Auch diese Versuche widersprechen demnach der Klupathyschen Annahme.

Übrigens wurden die Versuche erschwert dadurch, daß die Elektroden sehr schnell durch den Strom elektrolytisch zerstört wurden. Mit Kupfer und Zink ließen sich aus diesem Grunde überhaupt keine Resultate erzielen. Ein Kupferblech von 3 mm Dicke wurde innerhalb weniger Sekunden durchbohrt.

### 3. Die Elektrolyse.

Um die höhere Unterbrechungsgeschwindigkeit des Stiftunterbrechers zu erklären, muß demnach eine andere Wirkung herangezogen werden, die sich entweder über die Wärmeentwicklung überlagert, oder auch für sich allein die Unterbrechungen übernimmt. Am nächsten liegt hier, die elektrolytische Gasentwicklung heranzuziehen, wie das auch schon Wehnelt getan hatte. Alsdann müßten die Unterbrechungszahlen der beiden Unterbrecherformen gleich werden, falls man sogenannte *unpolarisierbare Elektroden* benutzt. Ich habe demnach Parallelversuche gemacht mit Unterbrechern, deren Elektrolyt Kupfersulfatlösung war, während als aktive Elektrode Kupferblech verwendet wurde. Da bei diesen Versuchen an der aktiven Elektrode eine Kupferabscheidung oder Auflösung stattfindet, und infolgedessen eine Veränderung der Elektrodenoberfläche, sind exakte Versuche mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Man muß die oszillographischen Aufnahmen un-

1) Weitere Tabellen vgl. Dissertation p. 53.

mittelbar nach Stromschluß machen. *Es zeigte sich, daß in der Tat jetzt gleiche Unterbrechungszahlen erzielt wurden.*<sup>1)</sup>

Es wurde noch auf eine andere Weise versucht, auch bei  $H_2SO_4$  als Elektrolyt und Platinelektrode den Einfluß des entwickelten Gases auszuschalten. Die aktive Elektrode wurde negativ genommen und  $KMnO_4$  bzw.  $K_2Cr_2O_7$  als Oxydationsmittel zu der Säure zugesetzt. Es wurde erwartet, daß etwa der entwickelte Wasserstoff oxydiert würde. Indessen verläuft die Wasserstoffentwicklung offenbar zu energisch, als daß die geringen in der Nachbarschaft der Elektrode vorhandenen Oxydationsmittel ausreichen könnten. Die Versuche hatten kein Resultat.<sup>2)</sup>

#### 4. Versuch einer theoretischen Formulierung.

Es wurde jetzt versucht, den Unterbrechungsvorgang beim Stiftunterbrecher als Übereinanderlagerung von Verdampfung und Elektrolyse mathematisch zu beschreiben.

Von vornherein erscheint es am einfachsten anzunehmen, daß bei gegebenem Unterbrecher die Unterbrechungszahl jedesmal dann einsetzt, wenn eine bestimmte für ihn charakteristische Gasmenge durch das Zusammenwirken von Verdampfung und Elektrolyse abgeschieden ist. Das liefert den Ansatz:

$$(39) \quad C_1 = A \int_0^{T_1} i dt + B \int_0^{T_1} i^2 w_u dt,$$

oder nach Entwicklung der Integrale

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1 = & A \frac{E}{w_k} \left( T_1 - \frac{L}{w_k} \left( 1 - e^{-\frac{w_k}{L} t} \right) \right) \\ & + B \frac{E^2 w_u}{w_k^2} \left[ T_1 + \frac{2L}{w_k} \left( 1 - e^{-\frac{w_k}{L} t} \right) + \frac{L}{2w_k} \left( 1 - e^{-\frac{2w_k}{L} T_1} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Versuche werden jedoch durch diese Formel nicht wiedergegeben wie Tab. 27 und die Figg. 29—30 zeigen.<sup>3)</sup>

Beim Stiftunterbrecher wird also mit wachsender Unterbrechungszahl immer weniger Energie für eine Unterbrechung

1) Tabellen vgl. Dissertation p. 55.

2) Tabellen vgl. Dissertation p. 57.

3) Weitere Figuren und Tabellen vgl. Dissertation p. 54—59.

aufgewandt. Man könnte daran denken, auch hier die Wärmeableitung in die Umgebung der Unterbrecherstelle für dies Verhalten verantwortlich zu machen, wie es sich beim Lochunterbrecher als richtig erwies. Da die Unterbrechungsstelle in dauernder Berührung mit den metallischen Elektroden ist, so würde sich dieser Einfluß wegen der großen Wärmeleitung der Metalle naturgemäß hier bis zu höheren Unterbrechungszahlen erstrecken, als beim Lochunterbrecher. Die Versuche

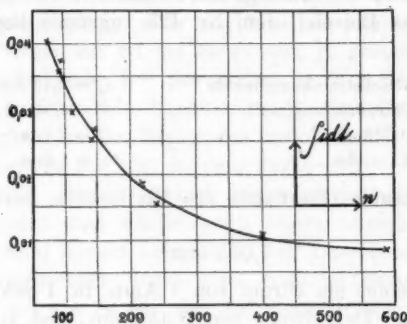


Fig. 29.

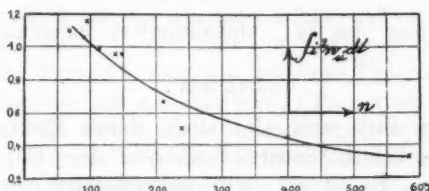


Fig. 30.

würden etwa alle innerhalb des Bereiches liegen, in dem die Wärmeableitung noch zur Geltung kommt. Alsdann müßte Kohle mit ihrer im Vergleich zu Platin so viel schlechteren Wärmeleitung (60 : 0,11) an Stelle des Metalles gesetzt die Abhängigkeit verändern und den Einfluß der Wärmeableitung teilweise eliminieren. Die Tab. 22 zeigt aber, daß dies nicht der Fall ist, daß also die Wärmeableitung durch die Elektrode nicht der Grund sein kann für die gefundene Tatsache.

Zwei Ursachen mögen hier zusammen wirken, um die beobachtete Abhängigkeit des  $C_1$  von der Unterbrechungszahl hervorzurufen.

a) *Bei dem Stiftunterbrecher wird auch schon während des Stromanstiegs infolge der Elektrolyse fortdauernd Gas gebildet, während beim Lochunterbrecher erst plötzlich am Ende des Stromanstiegs Verdampfung erfolgt.*

Die während einer Unterbrechung allein durch die Elektrolyse entwickelte Gasmenge ist durchaus nicht gering. Das zeigt folgendes Beispiel, dem Nr. 425 zugrunde liegt.

Dort ist

die Gleichstromkomponente . . .	$i_0 = 3,45 \text{ Amp.}$
die Unterbrechungszeit . . . . .	$T = 0,01922 \text{ sec}$
die Stiftlänge . . . . .	$l = 2 \text{ mm}$
die Stiftdicke . . . . .	$2r = 1 \text{ mm.}$

Die wirksame Oberfläche des Platinstiftes berechnet sich daraus zu

$$7,065 \text{ mm}^2.$$

Nun scheidet ein Strom von 1 Amp. in 1 Sek. 0,083 mg Sauerstoff ab. Der Strom von 3,45 Amp. und 0,01922 Sek. Dauer scheidet ab

$$0,005066 \text{ mg.}$$

Wenn man das in Kubikmillimeter umrechnet, so erhält man

$$3,542 \text{ mm}^3.$$

Um den Stift wird also allein durch Elektrolyse eine  $\frac{1}{2}$  mm dicke Schicht Sauerstoff während einer Unterbrechung abgeschieden. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß von der durch Elektrolyse beim Stromanstieg gebildeten Gasmenge schon ein großer Teil in Form von Bläschen von der Elektrode abgelöst wird, ehe die Unterbrechung einsetzt, und daß sich infolgedessen nur ein Bruchteil der elektrolytisch gebildeten Gasmenge am Unterbrechungsvorgang beteiligt. Naturgemäß wird diese Ablösung von Gasbläschen während des Stromanstiegs um so geringer sein, je schneller die Unterbrechungen erfolgen.

b) Man beobachtet am Stiftunterbrecher folgende Eigentümlichkeit:

Während bei niedrigen Unterbrechungszahlen der ganze Stift von der abtrennenden Gasschicht bedeckt ist, bleibt bei schnellen Unterbrechungen ein Teil des Stiftes beständig in Berührung mit der Flüssigkeit und zwar ein immer größerer Teil, je schneller die Unterbrechungen sind. Die Erscheinung zeigt in vergrößertem Maße Fig. 33.



Fig. 33.

Die Spitze des Stiftes bildet also beständig einen Nebenschluß für den Unterbrecher, so daß der Strom bei der Unterbrechung nicht auf Null herabsinkt. Der übrig bleibende Stromwert ist um so größer, je größer der von der Blase frei bleibende Teil des Stiftes ist (Fig. 34, Taf. III).

Diese und ähnliche Einflüsse, z. B. auch die Wirbelströme der Flüssigkeit an der Elektrode, beeinflussen, wie man sieht, die Vorgänge in der Tat in dem durch die Versuche signalisierten Sinne. Sie in exakter Weise zu formulieren, ist mir nicht gelungen und dürfte auch kaum erreichbar sein. So muß man wohl darauf verzichten, den Unterbrechungsvorgang am Stiftunterbrecher durch eine einfache Beziehung zu beschreiben, so wie es für den Lochunterbrecher gelungen ist.

##### 5. Unipolarität des Stiftunterbrechers.

Da unter 3. gezeigt ist, daß die Klupathysche Erklärung nicht angenommen werden kann, so versagt sie auch zur Erklärung der Tatsache, daß eine wirksame Unterbrechung vom Stiftunterbrecher nur geleistet wird, falls die aktive Elektrode positiv ist. Es bleibt noch die Erklärung zu geben für die Erfahrung, daß im Falle einer aktiven Kathode sehr bald eine Weißglut der Elektrode eintritt, die meist zur Zerstörung führt.

Von allen den oben aufgezählten Erklärungsweisen dieser Tatsache hat die von Stark und Cassuto<sup>1)</sup> auf die moderne Ionentheorie des Lichtbogens gestützte Vorstellung die größte Wahrscheinlichkeit für sich. Nach ihr setzt infolge der großen, an der Unterbrechungsstelle auftretenden Unterbrechungsspannung bei relativ niedriger Spannung ein Lichtbogen ein, sobald das Metall Kathode ist. Im umgekehrten Falle sind weit höhere Unterbrechungsspannungen möglich, ohne daß eine

1) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. Nr. 10. p. 264. 1904.

Lichtbogenentladung übergeht. Dementsprechend müßte man im ersteren Falle sehr viel niedrigere Unterbrechungsspannungen beobachten, als umgekehrt, was in der Tat in den Kurven sehr markiert zum Ausdruck kommt.

Fig. 35 auf Taf. III zeigt z. B. den Fall Kupfer in  $\text{CuSO}_4$ , wo, wie oben bemerkt, eine fast momentane Durchschmelzung der Kupferkathode auftrat. Die Spannung bei der Unterbrechung erreicht relativ niedrige Werte, und auch in der Stromabfallkurve bemerkt man Unstetigkeiten, die auf eine eintretende Lichtbogenbildung schließen lassen.

Um hierüber genaueren Aufschluß zu gewinnen, habe ich, in Ausgestaltung eines schon von Wehnelt<sup>1)</sup> mit der Braunschens Röhre angedeuteten Versuches, die Anordnung getroffen, daß das zeitliche Einsetzen des auftretenden Unterbrechungslichtbogens gleichzeitig mit den Strom- und Spannungskurven registriert wurde. Mit einer Linse wurde auf das photographische Papier, auf dem die Oszillographenkurven aufgenommen wurden, zugleich ein Bild der aktiven Platinspitze des Wehneltunterbrechers geworfen. Es ist eine sehr genaue Einstellung nötig, damit die Bilder der Oszillographenspiegel und das Bild der Platinspitze genau in eine Linie fallen, damit auf der Aufnahme keine Phasenverschiebung zwischen den Oszillographenkurven einerseits und dem Bild der Leuchterscheinung andererseits eintritt. Der Unterbrecher bestand aus einem 5 mm langen Platindraht als aktiver Elektrode und einer Bleiplatte als anderer Elektrode. Die beiden Elektroden waren in einem Glastrog mit planparallelen Wänden untergebracht. Der Glastrog war außen vollständig mit schwarzem Papier beklebt, das nur an der der Linse zugekehrten Seite eine Öffnung hatte. Reflexionen an der Rückwand wurden durch eine Hartgummiplatte verhindert.

Fig. 36—40<sup>2)</sup>, Taf. III, zeigen die entsprechenden mit positiver und negativer „aktiver Elektrode“ gemachten Beobachtungen. *Man sieht, daß bei aktiver Anode nach der Unterbrechung ein ganz lichtschwaches Fünkchen auftritt, daß der Strom in relativ steiler Kurve abfällt, und daß die Spannung*

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 233. 1899.

2) Figg. 38 und 39 vgl. Taf. I der Dissertation.



schnell auf einen hohen Wert ansteigt; daß bei aktiver Kathode aber eine recht lichtstarke Lichtbogenerscheinung (vgl. besonders Fig. 40) bei relativ niedriger Unterbrecherspannung einsetzt, daß der Stromabfall außerordentlich verlangsamt ist, und daß die Spannung mit ziemlichen Schwankungen auf tiefen Werten bleibt, höchstens am Ende wie in Fig. 37 nach dem Abbrechen des Lichtbogens vorübergehend auf einen etwas höheren Wert springt. Durch diese Versuche ist es wohl bewiesen, daß in der Tat die von Stark gegebene Erklärung richtig ist.

#### 6. Der Wehneltunterbrecher bei Temperatur- und Druckänderung.

Da die Wirkungsweise des Wehneltunterbrechers schon bei konstant gehaltenem Druck und Temperatur sich nicht einer mathematischen Formulierung unterwerfen ließ, so ist dies bei Änderung von Druck und Temperatur völlig ausgeschlossen.<sup>1)</sup>

### V. Der Betrieb des Induktionsapparates mit den elektrolytischen Unterbrechern.

#### 1. Grundlagen.

Die in den vorhergehenden Untersuchungen gewählten Verhältnisse sind nicht identisch mit denen, die beim Betriebe von Induktionsapparaten mit den elektrolytischen Unterbrechern vorhanden sind. In diesem Falle treten infolge der Rückwirkung des Sekundärstromes auf den Primärkreis Modifikationen ein, die je nach der besonderen Art und Dauer des Sekundärstromes verschieden sein müssen. Immerhin lassen sich einige allgemein gültige Gesichtspunkte zusammenstellen, durch die mit Berücksichtigung der Ergebnisse der vorstehenden Untersuchungen eine Beurteilung des Verhaltens der elektrolytischen Unterbrecher beim Betriebe von Induktorien möglich ist.

Die Rückwirkung des Sekundärkreises äußert sich bei einem Transformator so, daß die Selbstinduktion des Primärkreises in einer von der Stromstärke und Phase abhängigen Weise verringert wird. Es würde demnach bei einem be-

1) Eine experimentelle Übersicht über diese Einflüsse geben die in Tab. 30—33 der Dissertation mitgeteilten, in weiten Grenzen variierten Versuche.

lasteten Induktorium die für die Unterbrecherwirkung in Frage kommende Zeitkonstante  $L/w_k$  verkleinert erscheinen, so lange ein Sekundärstrom besteht.

## 2. Versuchsanordnung.

Um diesen Einfluß der Belastung experimentell zu studieren, wurden in dem Sekundärkreis lange Funken über Spitzen überspringen lassen und gleichzeitig oszillographische Strom- und Spannungskurven des Unterbrechers aufgenommen. Ähnlich, wie es oben bei der Untersuchung des Unterbrechungsfunkens beschrieben ist, wurden hier die auftretenden Sekundärfunken gleichzeitig mit den Strom- und Spannungskurven registriert.

Es wurde sehr sorgfältig darauf geachtet, daß die Projektion der Spitzen der Funkenstrecke genau in dieselbe Linie fiel, in der die Lichtpunkte des Oszillographen lagen. Andernfalls würde man eine Phasendifferenz zwischen den zusammengehörigen Werten von Strom und Spannung einerseits, von Funkenentladung andererseits bekommen.

## 3. Versuchsergebnisse.

In den Tabellen 34—40 und Fig. Nr. 534—538, 510—514, Taf. IV sind diese Ergebnisse niedergelegt.<sup>1)</sup>

Tabb. 36 und 40 zeigen in Parallelstellung, was mit den beiden Unterbrechertypen auftritt, wenn man die *Betriebsspannung* variiert. Man erkennt, daß dabei die Unterbrechungszahlen und gleichzeitig die erreichten Stromamplituden wachsen. Da aber das erreichte Strommaximum maßgebend ist für die Induktionswirkung, so wachsen mit zunehmender Betriebsspannung die erzielten Primärspannungen, denen die Sekundärspannungen proportional sind. Infolgedessen wird für die auftretenden Funken eine immer größere Elektrizitätsmenge verfügbar; dieselben dauern länger an. *Sobald die Entladung einsetzt, und der Sekundärstrom sich ausbildet, wird die Selbstinduktion des primären Systems kleiner, und die Stromstärke wächst nach der Unterbrechung sehr viel schneller an, als sie ohne den Sekundärstrom anwachsen würde. Verlischt inzwischen der sekundäre Funkenstrom, so verhält sich von da ab das Induktorium so, als sei die Sekundärspule überhaupt nicht*

1) Weitere Figuren vgl. Taf. II und III der Dissertation.

vorhanden; die Aufladung erfolgt von diesem Moment ab mit der Zeitkonstante, wie sie dem unbelasteten Induktorium eigen ist.

Besonders deutlich treten diese Verhältnisse bei den im ganzen langsamer erfolgenden Unterbrechungen des Lochunterbrechers hervor. Tabb. 34 und 37 und Nr. 534—538 und Nr. 510—514, Taf. IV, zeigen die Wirkung, die eine Änderung der Belastung hervorruft; und zwar wurde diese *Belastungsänderung* dadurch bewirkt, daß man die sekundäre Funkenstrecke in Stufen von Null bis zu einer Länge veränderte, bei der Funken nicht mehr auftraten. *Man erkennt wiederum die typische Wirkung der einsetzenden Entladung daran, daß der Strom alsbald mit einer sehr viel kleineren Zeitkonstante wieder zu wachsen anfängt, als der unbelastete Apparat besitzt.* Sobald die sekundäre Entladung aufhört, biegt die Kurve in diejenige über, die ohne sekundären Funken vorhanden ist. Mit zunehmender Funkenlänge wächst die Spannung, bei der der Funke einsetzt, d. h. es muß auch eine immer höhere Primärspannung beobachtet werden. Wird die Sekundärspule kurz geschlossen, so arbeitet der Unterbrecher so, als ob eine wesentlich kleinere Zeitkonstante vorhanden wäre. *Man erkennt dabei deutlich aus Kurve 534 und 535, daß dieser rückwirkende Einfluß des Sekundärstromes am beträchtlichsten ist gleich nach der Unterbrechung, während im letzten Teil des Stromanstieges offenbar ein dem unbelasteten System entsprechender Verlauf eintritt.* *Lochunterbrecher und Stiftunterbrecher unterscheiden sich hier wieder durch die Unterbrechungszeiten, die beim Stiftunterbrecher unter gleichen Bedingungen wesentlich kleiner sind, als beim Lochunterbrecher.*

In Tabb. 35 und 38 ist noch der Einfluß von mehr oder weniger *Primärwindungen* auf die Vorgänge verfolgt. Durch diese Variation wird einmal die Zeitkonstante beeinflusst, dann aber auch die Zahl der Induktionslinien, die im Eisenkerne des Induktoriums erregt werden. Infolgedessen wird die Unterbrechung um so kleinere Sekundärspannungen erzeugen, je weniger Windungen unter sonst gleichen Umständen verwendet werden. Da im übrigen mit der Windungszahl auch der Widerstand verändert wird, so ist aus den betreffenden Kurven nicht allzuviel zu entnehmen. Die Funkendauer nimmt zu mit der Zahl der verwendeten Windungen.

Nr. 525, Taf. IV, zeigt einen Fall, wo nicht die gewöhnlich eintretende *Lichtbogenentladung*, sondern *Funkenentladung aufgenommen wurde*. Man sieht, daß hier die *Stromunterbrechung mehrere Funken hintereinander auslöst*, was sich durch einen entsprechenden Verlauf des Stromabfalles und der Unterbrecherspannung ausdrückt.

Von besonderer Wichtigkeit für die Praxis wäre es, die Wirkungsweise der elektrolytischen Unterbrecher zu untersuchen, wenn mit ihrer Hilfe eine an die Sekundärspule *angeschlossene Röntgenröhre erregt wird*. Der sekundäre Stromverlauf dürfte in diesem Fall ein ähnlicher sein, wie bei den beobachteten Lichtbogen sehr großer Länge: Bei einer bestimmten Spannung setzen die Kathodenstrahlen ein, und wenn die Elektrizitätszufuhr unter einen bestimmten Wert heruntergeht, hören sie auf. Man wird also wohl ähnliche Unterbrechungskurven beobachten, wie sie Nr. 510—548 gefunden sind. Für diesen Fall gestatten die oben gefundenen Resultate folgenden Vergleich zwischen Lochunterbrecher und Stiftunterbrecher: Gleiche Wirkung an der Röntgenröhre muß bei gleicher Geschwindigkeit des Stromabfalles dann erzielt werden, wenn die im Primärkreise erreichten maximalen Stromstärken dieselben sind. Für diesen Fall sind in Fig. 27 die zusammengehörigen Stromkurven gezeichnet, die unter sonst gleichen Bedingungen durch Variation des Einschnürungsquerschnittes erreicht werden. Die Unterbrechungszahlen fallen dabei für den Lochunterbrecher etwa dreimal kleiner aus als für den Stiftunterbrecher. Der Stromanstieg ist deshalb im letzteren Falle wesentlich schneller als beim Lochunterbrecher. Für den Fall des belasteten Induktoriums gilt dasselbe für die Zeiten des Stromanstieges, die nach dem Erlöschen des sekundären Stromes liegen. *Diese letzteren Anstiege aber sind es, die notwendig die sogenannte Schließungsinduktion des Induktoriums bestimmen, die sich beim Betrieb von Röntgenröhren so störend geltend macht. Sie muß also bei dem Lochunterbrecher wesentlich geringer sein, als beim Stiftunterbrecher*, was sich mit den Erfahrungen deckt, die nach einer privaten Mitteilung Herr Dr. J. Rosenthal in der Praxis mit beiden Unterbrechern gemacht hat. Nach seiner Erfahrung läßt sich beim Lochunterbrecher die Schließungsinduktion völlig zum Ver-

schwinden bringen, während das beim Stiftunterbrecher nicht gelingt.

Auf der anderen Seite gestattet der Stiftunterbrecher unter gleichen Bedingungen eine höhere Unterbrechungszahl zu erzielen als der Lochunterbrecher. Doch ist das nicht immer ein Vorzug, da man ohnehin mit der Beanspruchung der Röntgenröhre nicht über ein gewisses Maß hinausgehen kann. Gegen den Stiftunterbrecher zeigt der Lochunterbrecher praktisch noch die Eigentümlichkeit, daß die Unterbrechungszahl fast nicht von der sekundären Funkenlänge beeinflusst wird, während das beim Stiftunterbrecher sehr stark der Fall ist. (Nr. 534—538 und Nr. 510—514, Taf. IV.) Das erklärt sich ja ohne weiteres aus dem oben beschriebenen Verhalten: Die Zeit, in der die kleinere Zeitkonstante den Stromanstieg bestimmt, tritt bei dem Lochunterbrecher gegen die übrige sehr zurück, während sie bei dem Stiftunterbrecher einen relativ großen Bruchteil der Unterbrechungszeit ausmacht.

Hingewiesen sei noch auf einen durchgängig beobachtbaren Unterschied des Lochunterbrechers gegen den Stiftunterbrecher. Bei den Aufnahmen mit dem Lochunterbrecher erkennt man, daß der Sekundärfunken beim Beginn eine ganz besonders markierte Intensität besitzt, die beim Stiftunterbrecher nicht vorhanden ist. Es spricht das offenbar für eine größere Plötzlichkeit der Unterbrechung. Das erklärt sich vielleicht aus der teilweise elektrolytischen Natur der Unterbrechung beim Stiftunterbrecher. Denn die elektrolytische Gasabscheidung erfolgt naturgemäß mit einer gewissen Langsamkeit, während man sich denken kann, daß die bei genügender Überhitzung erfolgende Verdampfung der Flüssigkeit mehr explosionsartig einsetzt.

#### VI. Tabellen.

In allen folgenden Tabellen ist:

- $2r$  = Durchmesser des Loches in der Einschnürungsstelle des Lochunterbrechers in Millimetern gemessen.
- $E_0$  = Betriebsspannung in Volt.
- $n$  = Unterbrechungszahl pro Sekunde.
- $i_{\text{eff.}}$  = der effektive Stromwert am Hitzdrahtamperemeter abgelesen in Ampere.
- $i_0$  = Stromwert an einem Gleichstromamperemeter gemessen in Ampere.
- $i_{\text{max.}}$  = maximale Amplitude der Stromkurve in Amp.

- $w_u$  = Widerstand des Unterbrechers mit Brücke und Telefon gemessen in Ohm.  
 $w_s$  = der Ohmsche Widerstand der Selbstinduktionsspule in Ohm.  
 $w_k$  = Gesamtwiderstand des Kreises in Ohm.  
 $L$  = Selbstinduktion in Henry gemessen.  
 $e_{\max.}$  = Spannungsmaximum in Volt.  
 $t_0$  = Temperatur der Flüssigkeit in Celsiusgraden.  
 $\omega$  = Größe der Einschnürungsstelle in Kubikmillimetern.  
 $F$  = Funkenlänge des Sekundärkreises vom Induktorium in Zentimetern.  
 $N$  = Spulenanzahl der primären Wickelung des Induktoriums.  
 $C_1$  = die zu einer Unterbrechung nötige Energiemenge berechnet nach der Formel (8):

$$C_1 = \frac{0,24 E^2 w_u}{w_k^2} \left[ T_1 - \frac{2 L}{w_k} \left( 1 - e^{-\frac{w_k}{L} T_1} \right) + \frac{L}{2 w_k} \left( 1 - e^{-\frac{2 w_k}{L} T_1} \right) \right] \text{ g-Cal.}$$

- $C'_1$  = die zu einer Unterbrechung nötige Energiemenge berechnet nach der Formel (9):

$$C'_1 = \frac{0,24 E^2 w_u}{w_k^2} \left( T_1 - \frac{3 L}{2 w_k} \right) \text{ g-Cal.}$$

## Tabelle 1.

## Lochunterbrecher.

Änderung von Selbstinduktion, Lochgröße und Betriebsspannung.

Lochgröße und Widerstand	Nr.	$E_0$	$n$	$i_{\text{eff.}}$	$w_k$	$C_1$
Selbstinduktion = 0,085 Henry, $w_s = 2,34$ Ohm.						
$2r = 3$ mm $w_u = 6,5$ Ohm	102	60	9,04	6,5	8,84	6,884
	103	80	25,7	7,2	8,84	8,138
	104	100	34,2	7,8	8,84	2,997
$2r = 2,5$ mm $w_u = 8,0$ Ohm	111	60	22,2	4,5	10,34	2,124
	112	80	42,2	5,0	10,34	1,32
	113	100	52,4	5,5	10,34	1,29
$2r = 2$ mm $w_u = 10$ Ohm	114	60	48	3	12,34	0,5925
	115	80	59	3,5	12,34	0,667
	116	100	74	4	12,34	0,803
Selbstinduktion = 0,0195 Henry, $w_s = 1,01$ Ohm.						
$2r = 3$ mm $w_u = 6,5$ Ohm	105	60	29	7,8	7,51	3,055
	106	80	49,7	9,8	7,51	2,9315
	107	100	69	10,8	7,51	2,952
$2r = 2,5$ mm $w_u = 8,0$ Ohm	108	60	51,7	6,4	9,01	1,376
	109	80	86,3	7,6	9,01	1,267
	110	100	115	8,4	9,01	1,288
$2r = 2$ mm $w_u = 10$ Ohm	117	60	86,3	4,7	11,01	0,638
	118	80	134,5	5,5	11,01	0,6074
	119	100	175	6,5	11,01	0,605

Tabelle 2.  
Lochunterbrecher.

Änderung von Selbstinduktion, Lochgröße und Betriebsspannung.

Lochdurchmesser und Widerstand	Nr.	$E_0$	$n$	$i_{\max.}$	$w_k$	$C_1$
Selbstinduktion = 0,085 Henry.						
$2r = 3 \text{ mm}$	139	80	10,5	6,98	9,16	11,44
$w_u = 6,5 \text{ Ohm}$	148	100	23	8,18	11,96	3,574
$2r = 2,5 \text{ mm}$	129	60	14,75	4,8	10,66	3,458
$w_u = 8 \text{ Ohm}$	136	80	28,4	6,57	10,66	2,5
	145	100	24,6	6,25	16,21	2,413
$2r = 2 \text{ mm}$	126	60	39,5	4,56	13,21	0,765
$w_u = 10 \text{ Ohm}$	133	80	36,7	4,65	15,41	1,23
	142	100	53,3	5,52	18,76	0,814
Selbstinduktion = 0,05 Henry.						
$2r = 3 \text{ mm}$	140	80	14,2	6,96	8,6	3,373
$w_u = 6,5 \text{ Ohm}$	149	100	27,7	8,8	11,4	3,551
$2r = 2,5 \text{ mm}$	130	60	18,35	5,0	10,1	3,195
$w_u = 8 \text{ Ohm}$	137	80	29,8	6,4	10,9	2,757
	146	100	35,1	6,6	15,65	1,854
$2r = 2 \text{ mm}$	127	60	35,9	4,64	12,1	1,2659
$w_u = 10 \text{ Ohm}$	134	80	39,5	4,8	14,9	1,611
	143	100	60,6	6,08	18,5	0,871
Selbstinduktion = 0,0046 Henry.						
$2r = 3 \text{ mm}$	141	80	43,5	7,45	7,33	3,53
$w_u = 6,5 \text{ Ohm}$	150	100	66	10,2	10,13	1,646
$2r = 2,5 \text{ mm}$	131	60	51,5	6,08	8,83	1,656
$w_u = 8 \text{ Ohm}$	138	80	83	8,0	8,83	1,787
	147	100	68,5	7,6	14,38	1,309
$2r = 2 \text{ mm}$	128	60	89	5,45	10,83	0,7812
$w_u = 10 \text{ Ohm}$	135	80	142,5	7,05	10,83	0,8364
	144	100	127,6	7,04	16,38	0,3657

Tabelle 5.

Lochunterbrecher. Änderung des Druckes.

 $E_0 = 80$  Volt.  $w_k = 8,84$ . Flüssigkeitstemperatur  $= 23^\circ$ .  $w_u = 6$  Ohm.Selbstinduktion  $= 0,085$  Henry. 2 Löcher je  $2r = 2,6$  mm.

Nr.	Druck in Atm.	$i_{\text{eff.}}$	$n$	$C_1$
352	1	7	35,1	1,985
353	1,5	7,6	30,3	2,51
354	2	8	30,2	2,5
355	2,5	8,2	28,1	2,83
356	3	8,4	25,42	3,3
357	3,3	8,5	26,6	3,18

Tabelle 6.

Lochunterbrecher. Änderung des Druckes.

 $E_0 = 80$  Volt.  $w_k = 6,56$ . Flüssigkeitstemperatur  $= 21^\circ$ .  $w_u = 6$  Ohm.Selbstinduktion  $= 0,0076$  Henry. 2 Löcher je  $2r = 2,6$  mm.

Nr.	Druck in Atm.	$i_{\text{eff.}}$	$n$	$C_1$
345	1	11	146	1,098
346	1,5	11,8	134,3	1,225
347	2	12,3	120,3	1,41
348	2,5	12,7	107,3	1,62
349	3	13,1	102,3	1,73
350	3,35	13,4	101,6	1,74

Tabelle 7.

Lochunterbrecher. Änderung des Druckes.

 $E_0 = 80$  Volt  $w_u = 6$  Ohm. 2 Löcher je  $2r = 2,6$  mm.Selbstinduktion  $= 0,032$  Henry.

Nr.	Druck in Atm.	$i_{\text{eff.}}$	$n$	$C_1$
390	3	11	42,2	2,5
391	2,5	9,36	50	2,1
392	2,05	9,1	53,3	1,925
393	1,5	9,0	?	
394	1	8,4	63	1,515
395	0,866	7,6	69	1,325
396	0,733	7,2	67	1,38
397	0,607	6,8	71	1,268
398	0,538	6,2	75,2	1,16
399	0,34	6,0	?	?
400	0,2	5,6	81,6	1,018



Tabelle 8.

Lochunterbrecher. Änderung der Flüssigkeitstemperatur.

 $E_0 = 60$  Volt. Lochunterbrecher mit 4 Löchern. Lochquerschnitt =  $4,334 \text{ cm}^2$ . $w_k - w_u = 3,334 \text{ Ohm}$ .  $L = 0,083 \text{ Henry}$ .

Nr.	$t_0$	$n$	$w_u$	$w_k$	$C_1''$	$C_1$
210	20	25,86	5,55	8,89	1,5	1,5
214	40	30,6	4,5	7,84	1,065	1,128
217	55	36,75	3,9	7,24	0,645	0,784
220	71	40,55	3,4	6,74	0,400	0,623
223	81,5	43,8	3,2	6,54	0,245	0,506
226	90	44,6	3,0	6,34	0,181	0,480
229	100	54,2	2,9	6,24	—	0,291

Tabelle 11.

Vergleich von Loch- und Stiftunterbrecher.

 $E_0 = 80$  Volt. Loch- und Stiftgröße =  $4,334 \text{ mm}^2$ .

Nr.	$L$	Art	$i_{\text{eff}}$	$w_k - w_u$	$n$
14	0,051	Loch	7,6	2,83	35,04
	„	Stift	3,2	„	165,0
15	0,082	Loch	8,4	2,33	50
	„	Stift	3,6	„	243
16	0,0076	Loch	11,1	1,56	101,5
	„	Stift	4	„	590,0

Tabelle 15.

Vergleich von Loch- und Elektrodenunterbrecher.

Lochgröße  $2r = 2 \text{ mm}$ .  $E_0 = 60$  Volt.

Nr.	$L$	Art	$n$	$i_{\text{eff}}$
50	0,085	Loch	41,3	3,1
51	„	Platinblech	141,0	1,7
54	0,0195	Loch	66,3	4,8
55	„	Platinblech	305,0	3,2

Tabelle 16.

Vergleich von Loch- und Stiftunterbrecher.

 $E_0 = 80$  Volt. Vorschaltwiderstand 3,34 Ohm. Lochgröße 4,334 mm<sup>2</sup>.Durchmesser des Platinstiftes  $2r = 1,9$  mm.

Nr.	$L$	Art	$i_{\text{eff.}}$	Größe der Einschnü- rungsstelle mm <sup>2</sup>	$n$
1	0,085	Loch	7,4	4,334	27,61
		Stift	6,5	13,8	50,00
2	0,051	Loch	7,8	4,334	31,01
		Stift	7,2	13,2	71,1
3	0,032	Loch	8,5	4,334	35,3
		Stift	7,2	12,62	104,8
4	0,018	Loch	9,7	4,334	41,0
		Stift	8,8	11,7	175,0
5	0,0076	Loch	10,0	4,334	63,5
		Stift	7,6 (?)	8,7	347,0

Tabelle 19. Platin.

Die aktive Elektrode des Stiftunterbrechers als Kathode und Anode.

Nr.	Aktive Elektrode	Durchmesser des Loches mm	$L$	$i_{\text{eff.}}$	$E_0$	$n$
67	positiv	2	0,085	2	60	134
68	negativ			1,5		124
69	positiv	2	0,0065	3,4	60	320
70	negativ			3		350
71	positiv	3	0,085	3	60	71
72	negativ			2,6		71
73	positiv	3	0,0195	5,4	60	173
74	negativ			4,0		192
80	positiv	2	0,085	1,8	50	113
81	negativ			1,3		129
82	positiv	2	0,085	1,3	30	65
83	negativ			1,0		50,0

Tabelle 20. Kohle.

Die aktive Elektrode des Stiftunterbrechers als Kathode und Anode.

Nr.	Aktive Elektrode	Durchmesser des Loches mm	$L$	$i_{\text{eff.}}$	$E_0$	$n$
84	positiv	2	0,085	2,25	60	123
85	negativ			1,8		150
86	positiv	2	0,0065	3,6	60	318
87	negativ			3,0		345
88	positiv	2	0,085	1,4	30	65,3
89	negativ			1,1		75,5

Tabelle 21.

 $L = 0,0067$  Henry.  $E_0 = 60$  Volt. Lochgröße  $2r = 3$  mm.

Verschiedene Metalle als positive aktive Elektroden im Stiftunterbrecher.

Nr.	Metall	$i_{\text{eff.}}$	$n$
90	Platin	5,4	208
91	Kohle	5,4	210
93	Eisen	5,5	196
94	Blei	5,4	215

Tabelle 22.

Platin und Kohle als positive aktive Elektroden im Stiftunterbrecher.

Nr.	Art	$L$	$E_0$	$i_{\text{eff.}}$	Lochdurchmesser $2r$ mm	$n$
69	Platin	0,0067	60	3,4	2	320
86	Kohle			3,6		318
82	Platin	0,085	30	1,3	2	65,5
88	Kohle			1,4		65,3
55	Platin	0,0195	60	3,2	2	305
56	Kohle			3,2		289,4
51	Platin	0,085	60	1,7	1,7	141
52	Kohle			1,7		140
90	Platin	0,0065	60	5,4	3	208
91	Kohle			5,4		210

Tabelle 27.

Stiftunterbrecher. Änderung der Selbstinduktion.

Länge des Platinstiftes 2 mm, Dicke des Platinstiftes  $2r = 1$  mm. $E_0 = 60$  Volt,  $w = 7,5$  Ohm, Vorschaltwiderstand = 0 Ohm.

Nr.	$L$	$w_k$	$n$	$\int i^2 w_u dt$	$\int i dt$
284	0,083	10,49	73,8	1,1	0,0406
289	0,0644	10,156	90,8	1,06	0,0358
285	0,051	9,93	93,5	1,165	0,0376
290	0,050	9,88	109	0,908	0,0295
286	0,032	9,48	143,3	0,835	0,02566
291	0,031	9,49	146	0,82	0,0273
292	0,0195	9,11	238	0,517	0,0156
287	0,018	9,05	215	0,677	0,019
288,	0,0076	8,66	400	0,463	0,0116
293	0,0046	8,61	582,5	0,35	0,00888

Tabelle 34.

Lochunterbrecher. Änderung der Belastung.

Nr.	$i_{\text{eff.}}$	$F$	$E_0$	$w$	$n$	$N$
534	11	kurz geschlossen	100	4,334	67,7	324
535	11	5	100	4,334	52,7	324
536	10,8	10	100	4,334	51,1	324
537	10,5	15	100	4,334	47,4	324
538	8,8	offen	100	4,334	25	324

Tabelle 35.

Lochunterbrecher. Änderung der Selbstinduktion.

Nr.	$i_{\text{eff.}}$	$F$	$E_0$	$w$	$n$	$N$
536	10,8	10	100	4,334	51,5	324
541	11,4	10	100	4,334	56,25	243
542	12	10	100	4,334	70,25	189
543	12,2	10	100	4,334	80,75	135
544	12,4	10	100	4,334	160,5	54

Tabelle 36.

Lochunterbrecher. Änderung von  $E_0$ .

Nr.	$i_{\text{eff.}}$	$F$	$E_0$	$w$	$n$	$N$
545	7,4	10	60	4,334	39,1	243
546	9,7	10	80	4,334	40,8	243
541	11,4	10	100	4,334	56,25	243
547	13,7	10	120	4,334	69	243
543	13,8	10	140	4,334	116,5	243

Tabelle 37.

Stiftunterbrecher. Änderung der Belastung.

Nr.	$i_{\text{eff.}}$	$F$	$E_0$	Stiftlänge	$n$	$N$
510	8,5	kurz geschlossen	100	3,3	193,5	324
511	8,5	5	100	3,3	206	324
512	8,2	10	100	3,3	176,3	324
513	8	13	100	3,3	146	324
514	5,6	offen	100	3,3	58	324

Tabelle 38.

Stiftunterbrecher. Änderung der Belastung.

Nr.	$i_{\text{eff.}}$	$F$	$E_0$	Stiftlänge	$n$	$N$
515	9	kurz geschlossen	100	3,3	301	189
516	8,4	5	100	3,3	370?	189
517	7,8	10	100	3,3	326?	189
518	7,7	13	100	3,3	291	189
519	6,2	offen	100	3,3	97,5	189

Tabelle 39.

Stiftunterbrecher. Änderung der Selbstinduktion.

Nr.	$i_{\text{eff.}}$	$F$	$E_0$	Stiftlänge	$n$	$N$
521	8,2	10	100	3,3	175	324
522	8,5	10	100	3,3	225	243
523	7,9	10	100	3,3	353	189
524	8	10	100	3,3	294	135
525	13	10	100	3,3	407	54

Tabelle 40.

Stiftunterbrecher. Änderung der Betriebsspannung.

Nr.	$i_{\text{eg.}}$	$F$	$E_0$	Stiftlänge	$n$	$N$
528	6,9	10	60	3,3	176	189
529	7,3	10	80	3,3	235	189
517	7,8	10	100	3,3	326(?)	189
530	8	10	120	3,3	293(?)	189
531	8,2	10	140	3,3	293(?)	189

VII. Zusammenfassung.<sup>1)</sup>

1. Es wird die Simonsche Theorie der sogenannten elektrolytischen Stromunterbrecher einer experimentellen Prüfung unterzogen und gefunden, daß sie für den Lochunterbrecher gültig ist.

2. Dieselbe wird auf den Fall der Druck- und Temperaturänderung erweitert. Die gefundenen Formeln werden durch experimentelle Prüfung bestätigt.

3. Es stellt sich heraus, daß die Simonsche Theorie für den Stiftunterbrecher nicht anwendbar ist, da außer der reinen Wärmewirkung des Stromes an der aktiven Metallelektrode noch die elektrolytische Gasabscheidung hinzukommt.

4. Die Klupathysche Theorie für den Stiftunterbrecher, die die Hauptursache für die Unterbrechung in der an der Platin-Schwefelsäure-Berührungsstelle auftretenden Peltierwärme sucht, muß nach den Experimenten abgelehnt werden.

5. Die Wirkungsweise des Stiftunterbrechers einer mathematischen Formulierung zu unterwerfen, mißlingt infolge von eintretenden Komplikationen sekundärer Art.

6. Bei der experimentellen Prüfung ergibt sich, daß von den verschiedenen Theorien über die Einseitigkeit des Stiftunterbrechers die Stark-Cassutosche maßgebend ist. Die Unipolarität des Stiftunterbrechers ist also durch den im Falle der aktiven Kathode auftretenden Lichtbogen bedingt.

7. Bei Benutzung der elektrolytischen Unterbrecher zum Betriebe von Induktionsapparaten tritt eine wesentliche, durch

1) Die Dissertation enthält als Anhang eine Zusammenstellung der Literatur über die elektrolytischen Unterbrecher.

die Rückwirkung der sekundären Wicklung bedingte Veränderung der Stromkurven auf. Es zeigt sich, daß der Stiftunterbrecher gegenüber dem Lochunterbrecher eine wesentlich größere Schließungsinduktion hat, deren Auftreten für Röntgenzwecke schädlich ist.

Hrn. Prof. Simon, meinem hochverehrten Lehrer, spreche ich auch an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und das stete fördernde Interesse meinen herzlichsten Dank aus.

Göttingen, Institut für angew. Elektrizität, Dez. 1907.

(Eingegangen 7. Januar 1908.)

**4. Eine Bestimmung  
der Schallgeschwindigkeit in Luft von 0°;  
von M. Thiesen.**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Vor einigen Jahren habe ich eine neue Methode zur Bestimmung von Schallgeschwindigkeiten, die Methode des geschlossenen Resonators angegeben. Sie besteht darin, daß man in einem geschlossenen Raume stehende Schwingungen erzeugt und die Frequenz bestimmt, bei welcher ein Maximum der Resonanz eintritt. Obgleich mein unmusikalisches Ohr mich für akustische Versuche wenig geeignet erscheinen läßt, haben die Umstände, namentlich der Zustand meiner Augen, mich veranlaßt, gerade diese Untersuchung weiter zu führen. Die Methode, ursprünglich hauptsächlich für größeren Druck bestimmt, ist zunächst für Atmosphärendruck ausgebildet und auf die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen bei verschiedenen Temperaturen angewandt worden.

Von den ausgeführten Beobachtungen sind bisher nur die für Kohlensäure bei hohen Temperaturen gewonnenen Relativwerte summarisch und ohne endgültige Bearbeitung veröffentlicht worden.<sup>1)</sup> Im vorliegenden Aufsätze soll nun zunächst eine neuere Beobachtungsreihe mitgeteilt werden, aus der sich die Schallgeschwindigkeit in trockener kohlensäurefreier Luft bei 0° ergibt. Die Resultate dieser Untersuchung in Verbindung mit denen einer ähnlichen noch nicht abgeschlossenen für Kohlensäure werden auch bei der Bearbeitung meiner älteren Versuche verwertet werden können.

---

<sup>1)</sup> Phys.-Techn. Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 27. p. 112. 1907; vgl. auch 23. p. 114. 1903; 24. p. 133. 1904; 25. p. 102. 1905; 26. p. 111. 1906.



Als Resonator diente ein Messingrohr von 100 cm Länge und 5,6 cm innerem Durchmesser bei 0,2 cm Wandstärke. Das Rohr war auf dem Lager des Fabrikanten besonders ausgesucht worden, um ein möglichst fehlerfreies Rohr mit glatter Innenwandung zu erhalten. Von einer recht merklichen Krümmung konnte es durch Durchdrücken bis auf etwa 0,01 cm befreit werden; nahezu von gleicher Ordnung war die Abweichung des Querschnittes von der genauen Kreisform. Nachdem die Enden sorgfältig abgedreht waren, wurde die genaue Länge des Rohres durch Vergleichung mit dem auf Silber geteilten Messingmeter 1890 bestimmt.

Zu dem Zwecke wurde das Rohr neben das Meter gelegt, dann drückte man gegen seine Enden ebene Glasplatten, die über die Teilung des Meterstabes herüberraigten, und bestimmte mikrometrisch den Abstand zwischen den Strichen des Stabes und ihren durch die Glasplatten erzeugten Spiegelbildern. Unter der Annahme gleicher Ausdehnung von Röhre und Stab ergab sich dann mit Rücksicht auf die bekannte Gleichung des Meterstabes

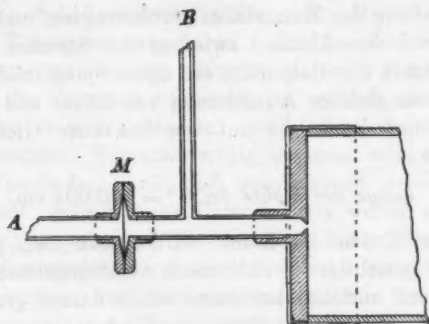
$$\text{Länge der Röhre bei } 0^\circ = 100,004 \text{ cm.}$$

Auf die Enden der Röhre wurden nun zwei gleichartige in der Figur in richtigen Verhältnissen wiedergegebene Fassungen aufgesetzt und verlötet; besonders wurde darauf geachtet, daß die Flächen, welche das Rohr abschließen, gut eben waren und genau auf den Rohrenden auflagen; daher wurden die Ringe, welche die Fassungen festhalten, besonders gearbeitet.

Der fertige Resonator wurde in einem Zinkkasten, der mit Eis gefüllt werden konnte, an zwei Stellen auf Holzträger aufgelegt und hier mit Klebwachs befestigt. Von den Rohrenden *A* wurde das eine durch Kautschukschläuche mit der Schallquelle, das andere mit zwei in die Ohren des Beobachters eingeführten Hörern verbunden, wie sie bei dem Edisonschen Phonographen benutzt werden. Die Membranen *M*, welche die Gasfüllung des Resonators von der äußeren Luft abschließen, bestanden aus 0,03 cm starkem Neusilberblech; bei einem Durchmesser von 2 cm ertragen solche Membranen eine Druckdifferenz von einer Atmosphäre; doch muß bei Ausführung der Versuche auf ihren beiden Seiten nahe derselbe

Druck bestehen, wenn der Schall nicht ausgelöscht werden soll. Die Öffnungen, durch welche der Schall in den Resonator eintritt, haben einen Durchmesser von 0,1 cm; eine starke Vergrößerung dieses Durchmessers scheint keinen Einfluß auf Schallstärke und mittlere Tonhöhe zu haben, dagegen das Bereich der Resonanz etwas zu verbreitern.

Die Ansatzröhren *B* dienen zur Füllung des Resonators. Im vorliegenden Falle strich die Luft hintereinander durch eine mit Ätznatronlösung gefüllte Waschflasche, eine lange mit Natronkalk und eine mit Phosphorpentoxyd gefüllte Röhre zum Resonator und wurde dann nach Durchstreichen einer mit konzentrierter Schwefelsäure beschickten Waschflasche durch



eine Wasserluftpumpe abgesaugt. Während der Füllung war ein Fenster des Beobachtungsraumes geöffnet; das Brennen von Gas und nach Möglichkeit auch der Aufenthalt von Menschen vor und während der Füllungen wurde vermieden. Die beiden Waschflaschen an den Enden bewirkten es, daß auch später durch Temperatur- und Barometerschwankungen eine Zirkulation nur im richtigen Sinne stattfinden konnte; sie ließen außerdem erkennen, daß alles vollkommen gedichtet war. Die Verbindungen bestanden aus Glasröhren, von denen immer eine mit ihrem verjüngten Ende in die andere gesteckt war; die sehr engen Fugen wurden durch Chatterton-Compound gedichtet. Nur die Flasche mit Natronlösung war mit einem Gummischlauch angeschlossen, durch Lösen ihres eingeschliffenen

Stöpsels konnte daher vor jeder Beobachtung der Druck ausgeglichen werden.

Als Schallquelle diente eine durch einen Elektromotor angetriebene Sirenenscheibe mit drei Reihen von 60, 80 und 120 Löchern; die Feinregulierung ihrer Geschwindigkeit erfolgte durch mikrometrische Bewegung eines Bremsmagneten. Durch eine Schraube ohne Ende wurde die Bewegung der Scheibe mit 99 mal verminderter Geschwindigkeit auf einen Bügel übertragen, der zweimal bei jeder Umdrehung einen Stromkreis schloß und dadurch eine Marke auf dem Papierstreifen eines Chronographen machte; auf denselben Streifen wurden gleichzeitig die Sekundenmarken einer genau gehenden Uhr und vom Beobachter gegebene Zeichen geschrieben, durch welche namentlich Anfang und Ende einer Beobachtung festgelegt wurden.

In nicht befriedigender Weise war die Forderung erfüllt, dem Resonator einen einfachen, also auch dauernd sich gleichbleibenden Ton zuzuführen. Nach dieser Richtung wäre noch eine erhebliche Verbesserung erwünscht und auch ausführbar, schon eine Vermehrung der Löcherreihen der Sirene würde eine recht merkliche Verbesserung bedingen. Die Schwierigkeit lag zum Teil darin, daß möglichst alle gut hörbaren Resonanztöne der Röhre gemessen und daher sehr verschiedene Schwingungszahlen von 165 bis 2000 in der Sekunde benutzt wurden. Außerdem war eine schnelle Abwechselung zwischen diesen Tönen erwünscht, um bald eine Übersicht über das Resultat zu gewinnen und etwaige Änderungen in der Zusammensetzung der Luft auszuschalten. Man griff daher nicht zu dem zeitraubenden Mittel, eine Zahl der Öffnungen zu verstopfen.

Bei den vorhandenen Löcherreihen erforderten die tiefen Töne so kleine Geschwindigkeiten des Motors, wie sie ursprünglich nicht vorgesehen waren, und dabei ergaben sich bei der früher benutzten Kuppelung zwischen Motor und Sirenenscheibe ganz unerträgliche Stöße von der Periode einer Umdrehung, die von einer Ungleichmäßigkeit des Motors herrührten. Diese Stöße milderte man dadurch, daß die Sirene mit dem Motor durch eine Uhrfeder verbunden wurde, welche beim Lauf durch die Bremsung der Sirenenscheibe gespannt war, natürlich kann

diese lose Kuppelung selbst wieder Schwingungen der Sirenscheibe verursachen. Nach der Beobachtung Nr. 47 wurde die Feder durch eine härtere ersetzt; nach Nr. 113 wurde der Motor neu montiert, da der Gips, mit dem er auf der Unterlage befestigt wird, gesprungen war; dabei wurde mit größerer Sorgfalt als früher auf das Zusammenfallen seiner Achse mit der der Sirene geachtet.

Bei langsamem Lauf waren die nicht periodischen Unregelmäßigkeiten des nicht genügend belasteten Motors ziemlich groß. Bei schnellem Lauf und starker Bremsung machte sich mehr die systematische von der Erwärmung der Drähte und der Sirenscheibe herrührende Änderung bemerkbar; doch auch in diesem Falle gelang es nur ausnahmsweise, den Ton längere Zeit während der etwa 3 Minuten währenden Beobachtung festzuhalten. Erschwert wurde die Regulierung der Geschwindigkeit dadurch, daß man keinen festen Anhalt dafür hatte, in welchem Sinne die Regulierung erfolgen sollte und daß man sich nicht der Gefahr aussetzen durfte, beim Verlieren des Tones durch stärkere Änderung nach der falschen Seite die Beobachtung zu verderben. Ein empfindlicher und leicht ablesbarer Anzeiger der augenblicklichen Geschwindigkeit wird wahrscheinlich genügen, um die Beobachtungen bequemer und viel genauer zu machen.

Auch abgesehen von den Änderungen der Motorgeschwindigkeit sind die Töne der benutzten Sirene keineswegs einfach. Die Löcher der Sirene haben 0,2 cm Durchmesser und liegen auf Kreisen von durchschnittlich 20 cm Durchmesser, sind also auch bei der Reihe von 120 Öffnungen verhältnismäßig weit voneinander entfernt. Die Luft strömt gegen diese Öffnungen durch eine etwas abstehende Spitze von weniger als 0,1 cm Öffnung; eine zentrale oder bei neuer Einstellung sich gleichbleibende Lage der Spitze gegen die Öffnungen ist nicht gesichert. Es folgt daraus, daß im allgemeinen alle harmonischen Obertöne des Grundtones aber zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Stärkeverhältnissen vertreten sein mußten. Daneben treten noch starke Nebengeräusche auf, die die eigentlichen Töne beinahe verdecken. Durch einen Resonator von genügendem Durchmesser, wie er hier benutzt wurde, werden nun diese Nebengeräusche bei nicht zu starkem Luftstrom

so weit ausgelöscht, daß sie nicht mehr stören.<sup>1)</sup> Dagegen können die Obertöne der Sirene in zylindrischen Resonatoren zu Fehlern Veranlassung geben, da die Maxima ihrer Resonanz mit dem Maximum der Resonanz des Grundtones nahe zusammenfallen.

Welcher Art solche Fehler sind, ist nicht mit Sicherheit anzugeben. Berücksichtigt man nur die Intensität, so wird man bei der Einstellung dem Maximum der Obertöne näher rücken, also kleinere Zeiten erhalten, läßt man sich mehr durch die Reinheit und Weiche des Tones leiten, so kann umgekehrt die Einstellung nach der anderen Seite hingedrängt werden. Bei den vorliegenden Beobachtungen war die Konstanz der Geschwindigkeit und Empfindlichkeit der Einstellung selten so groß, daß man sich bewußt durch einen oder den anderen dieser Einflüsse leiten lassen konnte.

Es ist möglich, durch Hilfsresonatoren mit unharmonischen Obertönen den Klang der Sirene so weit zu reinigen, daß im wesentlichen nur der Grundton übrig bleibt. Soll aber durch Vorschaltung eines solchen Hilfsresonators das Resultat nicht verfälscht werden, so muß entweder das Maximum des Hilfsresonators sehr scharf mit dem Maximum des Hauptresonators zusammenfallen, oder das Maximum des Hilfsresonators muß sehr breit sein. Resonatoren mit breitem Maximum sind die nach Helmholtz benannten offenen Resonatoren; denkt man sich zwei solche Resonatoren mit ihren Öffnungen aneinander gesetzt, so erhält man einen für unseren Fall brauchbaren Resonator, den ich Doppelresonator nenne. Die Schwingungszahl eines solchen Resonators ist entsprechend der von Helmholtz ausgeführten Theorie proportional mit

$$\sqrt{F \left\{ \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right\}},$$

falls  $F$  die Fläche der Öffnung,  $V_1$  und  $V_2$  die Volumina der beiden Kammern sind; für  $V_2 = \infty$  ergibt sich der einfache Helmholtzsche Resonator.

1) Resonatoren von kleinem Durchmesser schwächen diese Geräusche nicht. Ich schreibe es bis auf weiteres diesem Umstande zu, daß ich mit solchen Resonatoren unbrauchbare Resultate erhalten habe. Auch die Membranen scheinen solche Geräusche, wie von siedender Flüssigkeit, zu veranlassen, wenn sie keinem einseitigen Drucke ausgesetzt sind.

Mit solchen Hilfsresonatoren, deren Abstimmung durch Änderung der Öffnung in der die beiden Kammern trennenden Wand erfolgt war, sind einige in den p. 514—518 folgenden Tabellen gekennzeichnete Versuche ausgeführt worden. Gut gelungen war die Abstimmung nur für die Töne 3 und 4. Namentlich bei letzterem Tone erschienen die Beobachtungen mit dem Doppelresonator als besonders sicher und bequem; eine deutliche Abweichung von den anderen Beobachtungen hat sich nicht ergeben.

Bei Ton 3 war ein zweiter viel tieferer Ton, jedenfalls Ton 1 stark zu hören, sobald jener Ton in normaler Weise<sup>1)</sup> mit der Reihe von 60 Öffnungen erzeugt wurde. Dieser tiefe Ton, welcher 20 Schwingungen bei einer Umdrehung entsprechen würde, rührte direkt vom Motor her und wurde dem Resonator durch seine Wandung zugeführt. Er blieb auch bestehen, als nach Nr. 119 der Kollektor des Motors leicht geölt gehalten und dadurch das unangenehme von den Kohlenbürsten herrührende Geräusch des Motors fast ganz beseitigt wurde.

Die Beobachtungen wurden an den folgenden Tagen meist in Sätzen von vier Beobachtungen, zwischen denen längere Pausen lagen, ausgeführt; die beiläufigen nicht weiter benutzten Barometerstände sind beigelegt. Nach den ersten drei Beobachtungstagen wurde noch jedesmal etwa 6 Stunden lang trockene Luft durch den Resonator geleitet, später fand eine teilweise Lufterneuerung nur durch den Temperatur- und Druckwechsel statt.

1907	Nr.	Barometer
24. Oktober	1—25	75,8 cm
26. „	26—47	75,6 „
31. „	48—70	75,5 „
4. November	71—89	76,6 „
8. „	90—113	76,2 „
16. „	114—133	76,8 „
22. „	134—153	77,0 „

Es soll jetzt über die Berechnung der Beobachtungen berichtet werden.

1) Bei zwei Beobachtungen war die Geschwindigkeit der Sirene nur die Hälfte der normalen; hier rührte also Ton 3 von einem Oberton der Sirene her.

Zunächst war für jede einzelne Beobachtung die Schwingungszahl aus dem Abstände der von der Sirene herrührenden Marken zu ermitteln.

Die Lage der Marken zu den Sekundenmarken wurde in Hundertsteln Sekunden aufgenommen; dabei brauchten die ganzen Sekunden nicht gezählt zu werden. Die mittelsten Marken wurden nicht aufgenommen, da ihr Einfluß auf das Ergebnis sehr klein ist; doch war die Zahl der fortgelassenen Marken niemals so groß, daß das Gewicht des Resultates um ein Zehntel verkleinert wurde. Die Berechnung des mittleren Abstandes zweier Marken nach der Methode der kleinsten Quadrate gestaltet sich sehr einfach, da nur die Differenzen der symmetrisch zur Mitte liegenden Marken nach Maßgabe ihrer Gewichte zu verbinden sind, und da die Rechnung als Korrekptionsrechnung geführt werden kann. Das folgende Beispiel möge die Rechnung und auch die, allerdings nur bei den besseren Beobachtungen erlangte innere Übereinstimmung erläutern.

8. XI. 07. Nr. 112. 120 Löcher. Ton 11.

I	II	III	IV	V	VI	VII
23	53	00	30	1500	-5	-3
52	28	52	28	1344	-3	-2
78	01	04	27	1242	-3	-2
07	74	56	23	1012	-1	-3
32	48	08	24	1008	-2	-2
62	23	60	21	840	+1	0
87	97	12	22	836	0	0
16	70	64	18	648	+2	0
41	48	16	18	612	+1	-1
69	19	68	18	576	+2	+2
93	91	20	18	540	-1	+1
21	65	72	16	448	+1	+1
50	40	24	14	364	+3	+3
77	14	76	13	312	+4	+3

Hier enthält Kolumne I die Lage der ersten 14, Kolumne II die Lage der letzten 14 in umgekehrter Reihenfolge hingeschriebenen Marken in Hundertsteln Sekunden. Dazwischen sind 23 Marken nicht aufgenommen. Der beiläufige Abstand,



dessen Korrektur berechnet werden soll, beträgt 3,26 Sek. In Kolumne III sind die 50 bis 24fachen geraden Vielfachen von 26, in Kolumne IV die Werte von  $III + II - I$  angegeben. Kolumne V enthält die Produkte der Zahlen von Kolumne IV in die geraden Zahlen 50 bis 24. Die Summe dieser Kolumne beträgt 11282; die Summe der geraden Quadrate von 24 bis 50 beträgt 20076; also ist die Korrektur des angenommenen Abstandes in Hundertsteln Sekunden gleich  $11282/20076 = 0,562$  und dieser selbst gleich 3,26562 Sek. Die im allgemeinen nicht berechneten Kolumnen VI und VII enthalten die übrigen bleibenden Fehler der Kolumnen I und II in Hundertsteln der Sekunde. Ein Teil dieser Fehler rührt von einem systematischen Unterschied zwischen der Lage der geraden und ungeraden Marken her, der im vorliegenden Falle, da nur gerade Intervalle auftreten, keinen Einfluß hat, aber auch sonst unberücksichtigt blieb. Außerdem zeigen aber die Fehler im vorliegenden Falle einen deutlichen Gang, aus dem folgt, daß der Motor seine Bewegung verlangsamte; da diese Bewegung beständig reguliert wurde, so hatte also der Beobachter die Neigung, auf immer tiefere Töne einzustellen. Doch gilt dies nur für das vorliegende Beispiel.

Um die verschiedenen so gewonnenen Beobachtungsergebnisse miteinander vergleichbar zu machen, wurden sie zunächst, falls an Stelle von 120 nur 60 oder 80 Öffnungen der Sirene benutzt waren, mit den Zahlen 2 oder  $3/2$  und alsdann noch, den verschiedenen Tönen entsprechend, mit einer der Zahlen von 1 bis 12 multipliziert.

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
1	60	1	10	36,057	+ 37
2	"	1	10	083	+ 13
3	"	2	11	002	+ 48
4	"	2	23	35,994	+ 40
5	"	2	21	982	+ 28
6	"	4	46	854	- 52
7	"	4	46	835	- 71
8	120	8	38	865	- 8
9	"	8	44	915	+ 42
10	"	9	51	790	- 78



Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
11	120	9	47	35,908	+ 40
12	"	9	44	793	- 75
13	"	7	40	924	+ 45
14	"	11	52	832	- 29
15	"	11	46	828	- 33
16	"	7	37	892	+ 13
17	"	7	37	886	+ 7
18	"	6	32	869	- 17
19	"	6	28	832	- 54
20	"	7	37	961	+ 82
21	"	7	30	892	+ 13
22	60	3 <sup>1)</sup>	16	920	- 4
23	"	3 <sup>1)</sup>	19	36,002	+ 78
24	"	2	23	35,948	- 6
25	"	2	21	886	- 68
26	"	4	37	898	- 8
27	"	4	41	872	- 34
28	"	1	11	36,084	+ 64
29	"	1	7	002	- 18
30	"	2	21	036	+ 82
31	"	2	21	35,997	+ 43
32	"	4	46	853	- 53
33	"	4	43	968	+ 62
34	"	3	25	945	+ 21
35	"	3	31	939	+ 15
36	120	5	24	839	- 55
37	"	5	25	878	- 16
38	"	6	27	969	+ 83
39	"	6	30	890	+ 4
40	"	8	42	899	+ 26
41	"	8	40	871	- 2
42	"	9	31	775	- 93
43	"	9	25	782	- 86
44	"	6	32	36,226 <sup>2)</sup>	[+340]
45	"	6	33	35,918	+ 32
46	"	5	25	905	+ 11
47	"	5	22	880	- 14
48	60	1	9	920	-100
49	"	1	11	944	- 76

1) Oberton der Sirene.

2) Bei der Berechnung ausgeschlossen.

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
50	60	2	18	35,868	- 86
51	"	2	21	867	- 87
52	80	3	26	904	- 20
53	"	3	28	896	- 28
54	60	4	43	872	- 34
55	"	4	37	880	- 26
56	80	6	50	867	- 19
57	"	6	49	892	+ 6
58	"	6	47	889	+ 3
59	"	6	49	868	- 18
60	"	7	53	824	- 55
61	"	7	56	868	- 11
62	120	8	42	864	- 9
63	"	8	24	866	- 7
64	"	9	47	893	+ 25
65	"	9	44	869	+ 1
66	"	10	28	880	+ 16
67	"	10	47	816	- 48
68	"	11	52	852	- 9
69	"	11	50	902	+ 41
70	"	12	40	857	- 1
71	60	1	10	36,074	+ 54
72	"	1	11	077	+ 57
73	"	2	22	006	+ 52
74	"	3	33	35,969	+ 45
75	"	3	33	930	+ 6
76	"	4	50	879	- 27
77	"	4	42	907	+ 1
78	"	5	51	878	- 16
79	80	6	47	879	- 7
80	"	6	51	895	+ 9
81	"	7	58	877	- 2
82	120	7	36	941	+ 62
83	"	8	29	998 <sup>1)</sup>	[+ 125]
84	"	9	46	887	+ 19
85	"	10	53	895	+ 31
86	"	11	33	923	+ 62
87	"	10	28	886	+ 22
88	"	9	41	897	+ 29
89	"	9	36	886	+ 18

1) Von der Berechnung ausgeschlossen.

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
90	60	1	12	36,046	+ 26
91	"	1	12	021	+ 1
92	"	3	31	35,953	+ 29
93	"	3	32	965	+ 41
94	"	5	48	863	- 31
95	"	5	40	883	- 11
96	"	5	51	861	- 33
97	"	5	52	866	- 28
98	80	7	58	867	- 12
99	"	8	47	890	+ 17
100	"	8	52	877	+ 4
101	"	8	47	886	+ 13
102	120	10	41	877	+ 13
103	"	10	41	874	+ 10
104	"	11	32	875	+ 14
105	"	11	35	888	+ 27
106	"	11	43	871	+ 10
107	"	11	45	846	- 15
108	"	10	39	874	+ 10
109	"	10	40	887	+ 23
110	"	11	46	898	+ 37
111	"	11	53	935	+ 74
112	"	11	50	922	+ 61
113	"	11	55	857	- 4
114	60	4	43	852	- 54
115	"	4	39	888	- 18
116	"	4	40	893	- 23
117	"	4	44	884	- 22
118	"	4	41	887	- 19
119	"	4	40	882	- 24
120	"	4	40	905	- 1
121	"	4 <sup>1)</sup>	44	857	- 49
122	"	3	31	922	- 2
123	"	3	31	907	- 17
124	"	3	32	816	- 108
125	"	3	30	918	- 6
126	120	10	63	898	+ 34
127	"	10	52	853	- 11
128	"	10	44	845	- 19
129	"	10	36	861	- 3

1) Mit Hilfsresonatoren.

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
130	120	9	48	35,841	- 27
131	"	9	39	854	- 14
132	"	11	45	850	- 11
133	"	11	50	847	- 14
134	60	3	38	896	- 28
135	"	3	36	876	- 48
136	"	3	35	36,016	+ 92
137	"	4	50	35,948	+ 42
138	"	2	21	986	+ 32
139	"	2	23	969	+ 15
140	"	2	22	953	- 1
141	"	2	15	968	+ 14
142	"	1	12	36,122	+ 102
143	"	1	11	017	- 3
144	"	1	11	039	+ 19
145	"	1	10	057	+ 37
146	"	2 <sup>1)</sup>	22	024	+ 70
147	"	2	21	35,903	- 51
148	"	2	21	973	+ 19
149	"	2	22	942	- 12
150	120	11	53	876	+ 15
151	"	11	49	857	- 4
152	"	11	51	875	+ 14
153	"	11	56	871	+ 10

Die so erhaltenen Zahlen, in dem oben durchgeführten Beispiele also  $11 \times 3,26562 = 35,922$ , sind in den Tabellen p. 514—518 als Resultat eingetragen; sie sollen weiterhin mit  $z$  bezeichnet werden. Die Tabellen enthalten ferner noch die laufende Nummer der Beobachtung, die Zahl der benutzten Öffnungen der Sirene, die Ordnungszahl des Tones, die weiterhin mit  $n$  bezeichnet werden möge, die Zahl der während der Beobachtung registrierten Intervalle und den Unterschied zwischen Beobachtung und der sogleich zu erläuternden Schlußrechnung.

Aus den Werten von  $z$ , die demselben Tone zugehören, wurden Mittel gebildet, die in der Tabelle p. 519 mit ihrem mittleren Fehler als beobachtet angeführt sind. Zwei von

1) Mit Hilfsresonatoren.

den 153 Beobachtungen, die stark abweichen und sich auch außerdem als verfehlt kennzeichnen, sind von der Berechnung ausgeschlossen worden.

Die Werte von  $z$  zeigen eine deutliche Abhängigkeit von  $n$  und stehen in genügender Übereinstimmung mit der Forderung der Theorie, daß  $z$  eine lineare Funktion von  $n^{-1/2}$  sei. Nur ergibt sich der Einfluß der Schwingungszahl etwa 0,4 mal größer als er sich aus den bisher veröffentlichten Theorien und den genügend bekannten Werten der Reibungs- und Wärmeleitungskoeffizienten der Luft ableiten läßt. Aber auch dies Resultat steht in voller Übereinstimmung mit anderen, nach den Methoden von Kundt und Quincke ausgeführten Beobachtungen, und wird, wie ich glaube, durch den bisher nicht berücksichtigten Übertritt der Schallwellen in die Röhrenwandung erklärt. In der vorliegenden Arbeit beschränke ich mich darauf, anzunehmen, daß die Form der Abhängigkeit feststeht, und daß das für  $n = \infty$  extrapolierte  $z$  der wahren Schallgeschwindigkeit entspricht und werde die beiden Konstanten aus den Versuchen selbst ableiten.

$n$	$z$ beobachtet	Gewicht	$z$ berechnet	Fehler
1	36,035 $\pm$ 14	5	36,020	+15
2	35,961 12	11	35,954	+ 7
3	928 11	14	924	+ 4
4	884 7	19	906	-22
5	873 6	10	894	-21
6	888 10	13	886	+ 2
7	893 11	13	879	+14
8	881 6	12	873	+ 8
9	848 14	17	868	-20
10	870 7	18	864	+ 6
11	874 7	28	861	+13
12	857 —	2	858	- 1

$$z = 35,7927 + 0,2276 n^{-1/2} \\ \pm 58 \quad \pm 127$$

Wahrscheinlicher Fehler der Gewichtseinheit =  $\pm 0,0248$ .

Dabei entsteht die Frage, welches Gewicht den einzelnen Mittelwerten von  $z$  zuzulegen sei. Um diese Werte aus den mittleren Fehlern abzuleiten, reicht wohl die Zahl der Beob-

achtungen nicht hin, andererseits sind im Durchschnitt die Beobachtungen bei kleinen  $n$  entschieden unsicherer als bei den größeren. Ich habe angenommen, daß das Fehlerquadrat einer Beobachtung eine lineare Funktion von  $n^{-1}$  sei und daß der Fehler für  $n=11$  nur halb so groß sei als für  $n=1$ , und demnach die Gewichte, wie sie in der Tabelle p. 519 angegeben sind, dadurch erhalten, daß ich die Zahl der Beobachtungen mit

$$\frac{1,5}{0,7 + 3,3 n^{-1}}$$

multipliziert habe. Beim Tone 4 hat dann eine Beobachtung etwa die Einheit des Gewichtes.

Mit diesen Gewichten ist nun die endgültige Rechnung ausgeführt worden, deren Resultat die Tabelle p. 519 enthält; die gegen diese Rechnung übrig bleibenden Fehler der Einzelbeobachtungen sind in der letzten Kolonne der Tabellen p. 514 bis 518 enthalten.

Über die rechnungsmäßige Zuverlässigkeit des Resultates möge bemerkt werden, daß der angegebene wahrscheinliche Fehler des ersten Koeffizienten von  $z$  hauptsächlich von der Unsicherheit des zweiten Koeffizienten herrührt, wäre dieser Koeffizient bekannt, so würde sich der Fehler auf  $\frac{1}{3}$  ermäßigen. Die Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen der Fehler in Tabelle p. 519 ist annähernd gleich; auffällig ist nur der große Fehler des anscheinend sehr sicher bestimmten Wertes  $n=4$ . Auf eine Diskussion der Fehler der Einzelbeobachtungen soll nicht eingegangen werden.

Der erste Koeffizient von  $z$  ist die korrigierte Zeit, in welcher  $99 \times 120/2$  Schwingungen ausgeführt wurden; die zugehörige Wellenlänge ist  $2 \times 100,004$  cm. Daraus folgt der Wert für die Schallgeschwindigkeit der trockenen kohlensäurefreien Luft bei 0° gleich

$$33192 \pm 5 \text{ cm/sec.}$$

Inwieweit dieser Wert noch mit konstanten Fehlern behaftet ist, muß zunächst unentschieden bleiben, meine älteren Versuche mit kürzeren Resonatoren würden auf einen größeren Wert führen, doch waren dort systematische Fehler weniger ausgeschlossen, als bei der jetzt vorliegenden Reihe.

(Eingegangen 15. Januar 1908.)

### 5. Gesetze der Kompression einer Hohlraumstrahlung durch eine „semipermeable“ Platte; von Fritz Reiche.

(Gekürzter Abdruck der Berliner Dissertation.)

#### Einleitung.

In der Abhandlung „Über Temperatur und Entropie der Strahlung“ von W. Wien<sup>1)</sup> findet sich am Schlusse folgende Betrachtung:

„Es läßt sich auch die Folgerung ziehen, daß man nicht auf die Energie einzelner Farben in der Wärmestrahlung verändernd einwirken kann.

So darf keine Platte existieren, die nur Strahlen, deren Farbe zwischen zwei bestimmten Wellenlängen liegt, *vollkommen* hindurchläßt, alle übrigen *vollkommen* reflektiert, unabhängig von der Richtung der Strahlen. Man könnte durch eine solche Platte die Strahlung eines schwarzen Körpers in zwei Teile teilen; die Bewegung der Platte würde dann die Farbe und Energie der durchgelassenen Strahlung nicht verändern, dagegen die übrigen in der bereits betrachteten Weise.<sup>2)</sup> Wählen wir die Platte so, daß die Wellenlängen  $\lambda = a$  und  $\lambda = b$ , welche die Farbe der hindurchgelassenen Energie abgrenzen, auf der Seite des Maximums der Energieverteilung liegen, wo die Intensität nach den langen Wellen hin stark abfällt.

Sei  $b > a$ . Auf der Seite der Platte, wo die Strahlung zusammengedrückt wird, verkürzen sich alle Wellenlängen, die nicht zwischen  $a$  und  $b$  liegen, und die Energie der Farben, deren Wellenlänge etwas größer als  $b$  ist, erhalten jetzt Wellenlängen, die zwischen  $a$  und  $b$  fallen und sich daher durch den ganzen Raum frei ausbreiten. Ebenso würden bei  $a$  die anliegenden Farben von kürzerer Wellenlänge der sich

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 132. 1894.

2) Durch den Dopplereffekt.

ausdehnenden Strahlung zwischen  $a$  und  $b$  fallen und sich durch die Platte hindurch verteilen. Da nun  $\varphi_a > \varphi_b$ <sup>1)</sup>, so würde mehr Energie von der Seite, wo die Strahlung sich ausdehnt, nach der anderen Seite gelangen, als umgekehrt. Dieser Überschuß würde sich zu dem sonst vorhandenen, durch Zusammendrücken entstandenen Überschuß der Dichtigkeit addieren und mit diesem zusammen auf einen vollkommenen Spiegel drücken, der an die Stelle der Platte gesetzt wird.

Wenn man mit dem Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung zurücklegt, würde man demnach mehr Arbeit erhalten, als man für die Bewegung der Platte aufgebracht hat, und außerdem noch eine Farbenänderung zurückbehalten.

Man darf daher einer solchen Lamelle nur solche Eigenschaften zuschreiben, wie es von Kirchhoff geschieht, daß sie Strahlung einer Farbe *vorzugsweise* hindurchläßt, die anderen *vorzugsweise* zurückwirft, wobei aber immer ein endliches Verhältnis zwischen durchgelassenen und zurückgeworfenen Strahlen besteht. Dann ist der erörterte Prozeß nicht möglich.“

Diese Folgerung ist auffallend. Denn der oben aufgestellte Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz ist an bestimmte Wertepaare ( $a$ ,  $b$ ) geknüpft. Wählt man das Paar  $a$  und  $b$  so, daß  $\varphi_b > \varphi_a$ , was man sicher kann, so würde nach dem obigen mehr Energie von der Seite, wo die Strahlung komprimiert wird, nach der anderen gehen, als umgekehrt. Legt man nun den Weg der Platte mit einem Spiegel in umgekehrter Richtung zurück, so würde man sicher nicht mehr Arbeit gewinnen, als man für die Bewegung der Platte aufgewendet hat (möglicherweise müßte man sogar wiederum Arbeit aufwenden); der Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz wäre dann nicht mehr vorhanden. Wir wären damit zu dem merkwürdigen Ergebnis gelangt, daß die Forderungen des zweiten Hauptsatzes durch Platten von *gewisser* Durchlässigkeit verletzt, durch Platten von *anderer* Durchlässigkeit dagegen *nicht* verletzt werden. Wir würden also, da wir die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes für die Strahlungstheorie *allgemein* aufrecht erhalten wollen, mit Notwendigkeit dazu

1)  $\varphi_\lambda$  ist die monochromatische Strahlungsintensität der Farbe  $\lambda$ .



geführt werden, beschränkende Annahmen einzuführen. Zwei Wege ständen uns dabei zur Verfügung:

1. Man schließt die Wertepaare  $(a, b)$ , die zu einem Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz führen, von der Betrachtung aus, d. h. man beschränkt zahlenmäßig die Durchlässigkeit der Platte. Die Durchlässigkeit ist nun aber eine in sehr weiten Grenzen variierende Eigenschaft von großer Allgemeinheit; eine durch die Theorie geforderte, zahlenmäßige Einschränkung wäre daher zum mindesten höchst unwahrscheinlich.

2. Man stellt (wenigstens in Form einer Ungleichung) eine Beziehung zwischen  $\varphi_1$  und  $\lambda$  (also ein Energieverteilungsgesetz) auf, die ein für allemal für die Erfüllung der Forderungen des zweiten Hauptsatzes garantiert.

Es lohnt sich daher, im Interesse der Theorie, die Frage näher zu untersuchen, ob wirklich, wie W. Wien geschlossen hat, die theoretische Annahme der oben geschilderten Platte zu einem Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz führt. Diese Untersuchung ist im folgenden versucht.

Es sind dabei hier, im wesentlichen, nur die Resultate angegeben. In betreff der ausführlichen Rechnungen verweise ich auf die Originalarbeit.<sup>1)</sup>

#### § 1.

Wir stellen uns das Problem so:

Gegeben sei ein sehr großes, sehr breites Gefäß vom Volumen  $2V$ , das für Wärme undurchlässig ist, und dessen Boden und Decke weiß sind. Die anderen Wände seien vollkommen spiegelnd. Das Gefäß sei evakuiert und erfüllt mit „schwarzer Strahlung von der Temperatur  $T$ “, d. h. mit der im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen Strahlung, die ein vollkommen schwarzer Körper von der absoluten Temperatur  $T$  ausstrahlt.

In der Mitte des Gefäßes, parallel zu Boden und Decke und von derselben Größe, befinde sich ein Stempel, der nach beiden Seiten absolut spiegelt. Dieser Stempel wird sich unter

1) Gesetze der Kompression einer Hohlraumstrahlung durch eine „semipermeable“ Platte. Inauguraldissertation. Druck von E. Ebering, Berlin.

dem Druck der von beiden Seiten ihn treffenden Strahlungen im Gleichgewicht befinden.

Wir ersetzen nun diesen Stempel durch eine Platte der oben erwähnten Beschaffenheit. Es ist dies also eine Platte, die, wenn sie ruht, Strahlen von allen Schwingungszahlen zwischen  $\nu = a$  und  $\nu = b$  unabhängig von ihrer Richtung (und ihrem Polarisationszustand) ungehindert vollständig hindurchläßt, alle anderen reflektiert. Es sei  $b > a$ .

Wir führen mit dieser Platte während der kleinen Zeit  $dt$  eine Bewegung nach unten aus mit der sehr kleinen Geschwindigkeit  $v$ . (Diese Bewegung wird in dem Augenblick begonnen, wo man sich den Spiegel durch die Platte ersetzt denkt.) Ist  $F$  die Fläche der Platte und  $l$  die halbe Höhe des Gefäßes, also  $V = F \cdot l$ , dann soll  $dt$  der einschränkenden Bedingung

$$(1) \quad c dt < 2l - v dt$$

oder

$$dt < \frac{2l}{v + c}$$

unterliegen, wenn  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlung im Vakuum ist. Diese Bedingung drückt aus, daß ein Strahl während der Zeit  $dt$  nicht zweimal an die bewegte Platte gelangt.

Wir wählen, um die Behandlung des Problems zu vereinfachen,  $v$  so klein gegen  $c$ , daß in den definitiven Resultaten Glieder der Ordnung  $v^3/c^3$  und Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können; wir berücksichtigen dagegen die Glieder der Ordnung  $v/c$  und  $v^2/c^2$ .

Nachdem wir die Bewegung mit unserer Platte ausgeführt haben, denken wir uns die Platte wieder durch den früheren Stempel ersetzt und warten, bis die durch die Bewegung in der Strahlung entstandenen Unregelmäßigkeiten und Vorzugsrichtungen sich ausgeglichen haben. Dieser Ausgleich wird durch die weißen Wände beschleunigt. Wir wählten das Gefäß sehr breit, um den Einfluß der Grenzen der Platte vernachlässigen zu können. Dies ist immer möglich.

Die Strahlung war im Anfang „schwarz“ und daher durch ihr Volumen und ihre Temperatur eindeutig definiert. Und zwar ist die gesamte im Gefäß enthaltene Energie der Strahlung

$$U = U_1 + U_2,$$

wo  $U_1$  die Energie der Strahlung unter dem Stempel,  $U_2$  die Energie der Strahlung über dem Stempel ist. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz ist

$$U_1 = V \cdot u_1 = V C_0 T^4, \quad \text{ebenso auch nach}$$

$$U_2 = V \cdot u_2 = V C_0 T^4.$$

Dabei ist  $C_0$  eine von der Temperatur unabhängige Konstante,  $u_1$  und  $u_2 = u_1$  sind die räumlichen Energiedichten der Strahlungen unter und über dem Stempel. Also

$$(2) \quad U = 2 V C_0 T^4.$$

Ebenso schreiben wir der Strahlung eine gewisse Entropie zu

$$(3) \quad S = S_1 + S_2 = 2 V \cdot \frac{4}{3} C_0 T^3.$$

Bei der Bewegung unserer Platte werden nun diese Größen gewisse Änderungen erleiden, die zu berechnen wir uns zur Aufgabe stellen. Wir können von vornherein sehen, daß nach dem ersten Hauptsatz die Beziehung gelten muß:

$$dU = A + Q,$$

wo  $A$  die von außen an unserem System geleistete Arbeit,  $Q$  die von außen unserem System zugeführte Wärme bedeuten. Nun ist hier  $Q = 0$ , denn wir haben im Verlauf der Bewegung Wärme weder zu- noch abgeführt. Daher ergibt sich:

$$(4) \quad \underline{dU = A},$$

d. h. die Änderung der Gesamtenergie unseres Systems ist gleich der von außen an der Strahlung geleisteten Arbeit.

Man könnte versucht sein, zu glauben,  $A$  müsse hier den Wert 0 haben, da man ja auf beiden Seiten der Platte anfänglich die gleiche Strahlung hat. Wir werden indes später sehen, daß dies nur in einem gewissen Spezialfall zutrifft: wenn nämlich  $v$  so klein gewählt ist, daß man in den definitiven Resultaten nur bis zu Gliedern von der Ordnung  $v/c$  entwickelt.

## § 2.

Während ihrer Bewegung wird die Platte von oben und unten, aus allen Richtungen, von Strahlen aller Schwingungszahlen zwischen  $\nu = 0$  und  $\nu = \infty$  getroffen.

Die Neigung dieser Strahlen gegen die Ebene der Platte sei  $90^\circ - \vartheta_1$ ;  $\vartheta_1$  ist also der „Einfallswinkel“; das Azimut dieses Strahles gegen eine feste Ebene sei  $\varphi$ . Dann sieht man ohne weiteres, daß  $\varphi$  variiert von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$ . Würde die Platte ruhen, so würde über ihr und unter ihr  $\vartheta_1$  variieren zwischen 0 und  $\pi/2$ . Diese Verhältnisse werden aber durch die Bewegung der Platte modifiziert.

Strahlen, die die Platte *von oben* treffen und unter einem Winkel  $\vartheta_1$  einfallen, der größer ist als

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{v}{c},$$

erreichen, wie man leicht sieht, die vor ihnen gleichsam fliehende Platte nicht mehr. Es variiert daher  $\vartheta_1$  über der Platte von

$$\vartheta_1 = 0 \text{ bis } \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{v}{c}.$$

Analog folgt, daß  $\vartheta_1$  unter der Platte von

$$\vartheta_1 = 0 \text{ bis } \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{v}{c}$$

variieren kann, da auch Strahlen, die von der Platte weggehen, von ihr noch eingeholt werden.<sup>1)</sup>

Ein Teil der Strahlen, die auf die Platte fallen, geht ungehindert hindurch, der Rest wird vollständig reflektiert.

Es sei  $\nu_1$  die Schwingungszahl eines unter dem Einfallswinkel  $\vartheta_1$  *von unten* auf die Platte fallenden Strahles. Die Zahl  $\nu_1$  wird gemessen durch die Anzahl der Wellen, die in der Zeiteinheit durch eine *ruhende*, zum Strahl senkrechte Ebene tritt. Fällt aber nun dieser Strahl auf die mit der Geschwindigkeit  $v$  sich ihm entgegenbewegende Platte, und denken wir uns mit dieser Platte fest verbunden einen Beobachter, der wiederum die Anzahl der ihn in der Zeiteinheit treffenden Wellen zählt, so wird für den Beobachter auf der Platte, oder, wie wir kurz sagen können, für die Platte der Strahl nicht mehr die Schwingungszahl (Farbe)  $\nu_1$  haben, son-

1) Vgl. F. Hasenöhr, Über den Druck des Lichts. Jahrbuch der Radioaktivität u. Elektronik 2. p. 301. 1905.

dem eine größere, und zwar nach dem Dopplerschen Prinzip die Schwingungszahl

$$(5) \quad \nu' = \nu_1 \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 \right).$$

Fällt dieses  $\nu'$  ins Intervall  $a \dots b$ , dann passiert der Strahl der Schwingungszahl  $\nu_1$  die Platte ungehindert. Liegt aber  $\nu'$  außerhalb dieses Intervalls, so wird dieser Strahl vollständig reflektiert, und zwar unter einem Winkel  $\vartheta_2$ , der im allgemeinen von  $\vartheta_1$  verschieden ist. Zählt man nun wiederum an einer ruhenden Ebene die Anzahl der Wellen, die auf dem reflektierten Strahl in der Zeiteinheit die Ebene passieren, so findet man eine Zahl  $\nu_2$ , die wir die „Schwingungszahl des reflektierten Strahls“ nennen, und die mit  $\nu'$ , dem vorigen analog, durch die Beziehung des Dopplerschen Prinzips verknüpft ist:

$$\nu' = \nu_2 \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta_2 \right).$$

Setzt man hier für  $\nu'$  den Wert aus (5) ein, so folgt:

$$(6) \quad \nu_2 = \nu_1 \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta_2}.$$

Um  $\vartheta_2$  als Funktion von  $\vartheta_1$  allein auszudrücken, benutzen wir noch die Beziehung<sup>1)</sup>:

$$(7) \quad \nu_2 = \nu_1 \frac{\cos \vartheta_1 + \frac{v}{c}}{\cos \vartheta_1 - \frac{v}{c} \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2)}.$$

Eliminiert man nun  $\nu_2 / \nu_1$  aus (6) und (7), so ergibt sich leicht:

$$(8) \quad \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta_2} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Diese Gleichung läßt sich auch direkt aus der Theorie des Strahlungsdruckes auf bewegte Flächen ableiten.<sup>2)</sup> Durch

1) Vgl. M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 74.

2) M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung p. 346; F. Hasenöhl, Über den Druck des Lichts. Jahrbuch der Radioaktivität u. Elektronik. p. 284, 285.

eine geringe Umwandlung erhält man aus (8) die Beziehung

$$(9) \quad \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \frac{v}{c}} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_2 - \frac{v}{c}}$$

und hieraus:

$$(10) \quad \cos \vartheta_2 = \frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos \vartheta_1 + 2 \frac{v}{c}}{1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Man sieht also, daß  $\vartheta_2$ , der Reflexionswinkel, im allgemeinen von  $\vartheta_1$ , dem Einfallswinkel, verschieden ist, und zwar ist  $\vartheta_2 < \vartheta_1$ .  $\vartheta_1$  variiert, wie wir oben sahen, von

$$\vartheta_1 = 0 \text{ bis } \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{v}{c};$$

daher variiert  $\vartheta_2$  von

$$\vartheta_2 = 0 \text{ bis } \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{v}{c}.$$

Setzt man den in (10) erhaltenen Wert für  $\cos \vartheta_2$  in (6) ein, so folgt:

$$(11) \quad v_2 = v_1 \frac{1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Hiermit ist  $v_2/v_1$  als Funktion von  $\vartheta_1$  allein ausgedrückt.

Es sei  $\mathfrak{R}_v$  die Strahlungsintensität (Helligkeit) der monochromatischen geradlinig polarisierten Schwingung der Farbe  $v$ . Betrachten wir die unter dem Winkel  $\vartheta_1$  von unten auf die Platte fallende unpolarisierte Strahlung der Farbe  $v_1$ , so ist die Energiemenge, die diese Strahlung in der Zeit 1 durch die Flächeneinheit einer ruhenden, zur absoluten Strahlrichtung senkrechten Ebene sendet (die sogenannte „absolute einfallende Strahlung“)

$$(12) \quad E_1 = 2 \mathfrak{R}_{v_1} d v_1 \sin \vartheta_1 d \vartheta_1 d \varphi.$$

Die „absolute reflektierte Strahlung“ ist analog:

$$(13) \quad E_2 = 2 \mathfrak{R}_{v_2} d v_2 \sin \vartheta_2 d \vartheta_2 d \varphi.$$

Demnach sind die auf die Flächeneinheit der bewegten Platte in der Zeit 1 auffallenden bzw. von ihr reflektierten Energiemengen

$$(14) \quad I_1 = E_1 \left( \cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} \right) \text{ auffallend,}$$

$$(15) \quad I_2 = E_2 \left( \cos \vartheta_2 - \frac{v}{c} \right) \text{ reflektiert.}$$

Also

$$(16) \quad I_1 = 2 R_{v_1} d v_1 \sin \vartheta_1 \left( \cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} \right) d \vartheta_1 d \varphi.$$

Außer der elektromagnetischen Theorie folgt nun, daß der Strahlungsdruck keine tangentiellen Kräfte auf den vollkommenen Spiegel ausübt.<sup>1)</sup> Es ist daher stets

$$\frac{I_1 \sin \vartheta_1}{c} - \frac{I_2 \sin \vartheta_2}{c} = 0$$

oder

$$(17) \quad I_1 \sin \vartheta_1 = I_2 \sin \vartheta_2.$$

Daher nach (8)

$$(18) \quad I_2 : I_1 = v_2 : v_1$$

und nach (11)

$$(19) \quad I_2 = 2 R_{v_2} d v_2 \sin \vartheta_2 \left( \cos \vartheta_2 + \frac{v}{c} \right) \frac{1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} d \vartheta_2 d \varphi.$$

Eine andere Form von  $I_2$  folgt aus (18) und (15):

$$I_2 = 2 R_{v_2} d v_2 \sin \vartheta_2 \left( \cos \vartheta_2 - \frac{v}{c} \right) d \vartheta_2 d \varphi.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (16), so ergibt sich unter Benutzung von (18), (8), (9) und der aus den beiden letzteren durch Differentiation folgenden Beziehung

$$-\frac{d \vartheta_1}{d \vartheta_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

das Resultat

$$R_{v_1} d v_1 : R_{v_2} d v_2 = v_1^4 : v_2^4$$

oder

$$R_{v_1} : R_{v_2} = v_1^3 : v_2^3,$$

d. h. die monochromatischen Intensitäten der beiden Strahlenbündel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Schwingungszahlen.

Alle bisher abgeleiteten Formeln gelten für den Raum unter der Platte. Man erhält aus diesen die für die Strahlung über der Platte geltenden Formeln einfach durch Vertauschung

1) M. Abraham, Elektromagnet. Theorie der Strahlung, p. 333, 334.



von  $+v/c$  mit  $-v/c$ . Die in (11) und (19) gewonnenen Resultate vereinfachen sich, wenn man nach Potenzen von  $v/c$  entwickelt und, gemäß der oben eingeführten Annahme, Glieder der Ordnung  $v^3/c^3$  und Glieder von höherer Ordnung fortläßt. Es ergeben sich dann die Formeln

$$(11a) \quad v_2 = v_1 \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 + 2 \frac{v^2}{c^2} \right),$$

$$(19a) \quad I_2 = 2 R_{\nu} d \nu_1 \sin \vartheta_1 \left( \cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} \right) \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 + 2 \frac{v^2}{c^2} \right) d \vartheta_1 d \varphi,$$

während (5) und (16) unverändert bleiben.

Ebenso gelten für die Strahlung *über der Platte* die Formeln

$$(20) \quad v' = v_1 \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 \right),$$

$$(21) \quad v_2 = v_1 \left( 1 - 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 + 2 \frac{v^2}{c^2} \right),$$

$$(22) \quad I_1 = 2 R_{\nu} d \nu_1 \sin \vartheta_1 \left( \cos \vartheta_1 - \frac{v}{c} \right) d \vartheta_1 d \varphi,$$

$$(23) \quad I_2 = 2 R_{\nu} d \nu_1 \sin \vartheta_1 \left( \cos \vartheta_1 - \frac{v}{c} \right) \left( 1 - 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1 + 2 \frac{v^2}{c^2} \right) d \vartheta_1 d \varphi.$$

### § 3.

Es soll zuerst die Energie, die während der Zeit  $dt$  überhaupt durch die Platte hindurchgeht, berechnet werden. Wir betrachten die Strahlung unter und über der Platte getrennt.

Ein Strahl der Schwingungszahl  $\nu$ , der von unten unter dem Winkel  $\vartheta$  auffällt, erscheint an der bewegten Platte als von der Schwingungszahl  $\nu (1 + v/c \cos \vartheta)$  nach (5). Liegt  $\nu(1 + v/c \cos \vartheta)$  zwischen  $a$  und  $b$ , dann geht die Energie der Farbe  $\nu$  ungehindert durch die Platte. Nun variiert, wie wir oben sahen,  $\vartheta$  zwischen 0 und  $\pi/2 + \arcsin v/c$ , also nimmt  $\nu(1 + v/c \cos \vartheta)$  alle Werte an zwischen  $\nu(1 - v^2/c^2)$  und  $\nu(1 + v/c)$ .

Je nachdem dieses Intervall ganz außerhalb, ganz innerhalb, oder drittens zum Teil außerhalb, zum Teil innerhalb des Intervalls  $a \dots b$  liegt, wird die Energie der entsprechenden  $\nu$  gar nicht, d. h. unter keinem Winkel  $\vartheta$ , vollständig, d. h. unter allen  $\vartheta$  von 0 bis  $\pi/2 + \arcsin v/c$ , oder zum Teil hindurchgelassen. Im letzten Falle existiert ein Grenzwinkel  $\vartheta$ , der



den größten bzw. kleinsten Einfallswinkel der Strahlen bestimmt, die die Platte passieren können.

Um daher  $I_{12}$ , die von unten nach oben durch die Platte tretende Energie, zu berechnen, teilt man die Gesamtheit der  $\nu$  von 0 bis  $\infty$  in einzelne Intervalle, integriert für jedes dieser Intervalle den sich aus (16) ergebenden Ausdruck

$$2\mathfrak{R}_\nu d\nu F dt d\varphi \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) d\vartheta$$

nach  $\vartheta$ , wobei die Grenzen der Integration sich aus der obigen Betrachtung ergeben, und führt schließlich die Integrationen nach  $\varphi$  (von 0 bis  $2\pi$ ) und  $\nu$  aus.

Bildet man nun ebenso  $I_{21}$ , die von oben nach unten durch die Platte tretende Energie, indem man einfach  $v/c$  mit  $(-v/c)$  vertauscht, so ergibt sich durch Subtraktion der Überschuß der von unten nach oben gehenden Energie über die von oben nach unten durch die Platte treterde:

$$\begin{aligned} I_{12} - I_{21} &= \int_{\nu=a(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2})}^{a(1+\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2})} 2\pi F dt \mathfrak{R}_\nu d\nu \left\{ 1 + 2\frac{v}{c} - 2\left(\frac{a}{\nu} - 1\right) - \frac{c^2}{\nu^2} \left(\frac{a}{\nu} - 1\right)^2 \right\}, \\ &\quad + \int_{\nu=b(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2})}^{b(1+\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2})} 8\pi F dt \mathfrak{R}_\nu d\nu \frac{v}{c} \\ &\quad - \int_{\nu=b(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2})}^{b(1+\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2})} 2\pi F dt \mathfrak{R}_\nu d\nu \left\{ 1 - 2\frac{v}{c} - 2\left(\frac{b}{\nu} - 1\right) - \frac{c^2}{\nu^2} \left(\frac{b}{\nu} - 1\right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Das erste und dritte Integral erstrecken sich über Gebiete der Größe  $2a(v/c)$  bzw.  $2b(v/c)$ . Es tritt also in beiden  $v/c$  als Faktor auf. Im zweiten Integral steht  $v/c$  bereits als Faktor da. Wir gehen daher in der Berechnung der Integrale nur bis zu Gliedern der Ordnung  $v/c$ , weil die Glieder der Ordnung  $v^2/c^2$ , durch Multiplikation mit dem Faktor  $v/c$ , Glieder von der Ordnung  $v^3/c^3$  liefern würden.

Nach Ausführung der Rechnung erhält man:

$$(24) \quad I_{12} - I_{21} = 8\pi F dt \frac{v}{c} \left\{ \frac{1}{3} a \mathfrak{R}_a - \frac{1}{3} b \mathfrak{R}_b + P \right\},$$

wo

$$P = \int_a^b \mathfrak{R}_v dv.$$

Wie man sieht, enthält  $I_{12} - I_{21}$  keine Glieder der Ordnung  $v^2/c^2$ . Dasselbe Resultat erhält man auf direktem Wege, wenn man von vornherein in der Rechnung schon die zweite Potenz von  $v/c$  vernachlässigt. Kehrt man die Richtung der Bewegung um, so wechselt auch  $I_{12} - I_{21}$  sein Vorzeichen. Für den Spezialfall  $a = b$  wird  $I_{12} - I_{21} = 0$ ; das ist der Fall eines vollkommenen Spiegels. Für  $a = 0$ ,  $b = \infty$  wird

$$I_{12} - I_{21} = 8\pi F dt \frac{v}{c} \int_0^\infty \mathfrak{R}_v dv,$$

oder wenn man

$$2 \int_0^\infty \mathfrak{R}_v dv,$$

d. h. die gesamte Helligkeit der unpolarisierten Strahlung gleich  $K$  setzt,

$$I_{12} - I_{21} = 4\pi F dt \frac{v}{c} K = Fv dt \cdot u.$$

Dabei ist  $u = 4\pi K/c$  die räumliche Energiedichte der Gesamtstrahlung. Dies ist der Fall, daß die Platte für alle Farben durchlässig ist, mit anderen Worten: Die Platte ist dann nur eine geometrisch fingierte Ebene.  $I_{12} - I_{21}$  ist daher auch in diesem Fall einfach die Energie, die im Volumen  $Fv dt$  enthalten ist.

Ist speziell  $b = a + dv$ , d. h. ist die Platte nur für das schmale Intervall  $dv$  durchlässig, oder, wie wir sagen können, ist die Platte nur für die Farbe  $a$  durchlässig und setzen wir voraus:  $dv$  klein gegen  $a(v/c)$ , dann folgt:

$$I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F dt dv \frac{v}{c} \left\{ 2 \mathfrak{R}_a - a \left( \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right)_a \right\}.$$

$I_{12} - I_{21}$  ist also der Größe des Intervalls  $d\nu$  proportional. Hat in diesem Fall  $a$  noch speziell den Wert, in dem  $\mathfrak{R}_\nu$  ein Maximum wird, dann  $(\partial \mathfrak{R}_\nu / \partial \nu)_a = 0$  und

$$I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F dt d\nu \frac{v}{c} 2 \cdot \mathfrak{R}_{\text{max.}} = \frac{2}{3} F v dt u_{\text{max.}} \cdot d\nu.$$

Dabei ist  $u_\nu = (8\pi/c) \mathfrak{R}_\nu$  die räumliche Energiedichte der monochromatischen Strahlung.

Es ist also hier  $I_{12} - I_{21}$  gleich  $\frac{2}{3}$  der ganzen im Raum  $Fv dt$  enthaltenen Energie die Farbe  $u_{\text{max.}}$ .

Es ist bemerkenswert, daß der allgemeine Ausdruck von  $I_{12} - I_{21}$  ganz ohne Rücksicht auf ein spezielles Energieverteilungsgesetz abgeleitet ist. Wir können  $I_{12} - I_{21}$  auch folgendermaßen schreiben:

$$(25) \quad I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F dt \frac{v}{c} \{G(b) - G(a)\},$$

wo

$$G(v) = 3 \int_0^v \mathfrak{R}_\nu d\nu - v \mathfrak{R}_\nu.$$

Um über das Vorzeichen von  $I_{12} - I_{21}$  entscheiden zu können, bilden wir

$$\frac{dG(v)}{dv} = 2\mathfrak{R}_\nu - v \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial v} = H(v).$$

Ist  $H(v)$  stets  $\geq 0$ , dann ist  $G(b) \geq G(a)$  und  $I_{12} - I_{21}$  ist stets positiv (im Grenzfall = 0). Es kommt also auf das Vorzeichen von

$$H(v) = 2\mathfrak{R}_\nu - v \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial v}$$

an. Ohne auf ein spezielles Energieverteilungsgesetz Rücksicht zu nehmen, können wir von vornherein erkennen, daß nicht für alle  $v$   $H(v) < 0$  sein kann. Denn, bezeichnen wir den Wert von  $v$ , der dem Maximum von  $\mathfrak{R}_\nu$  entspricht, mit  $v_m$ , dann ist, für alle  $v > v_m$  sicher  $\partial \mathfrak{R}_\nu / \partial v < 0$  und daher  $H(v) > 0$ . Auch unterhalb  $v_m$  gibt es sicher noch Werte von  $v$ , für die  $H(v) > 0$ ; trotzdem ist es prinzipiell nicht ausgeschlossen, daß für noch kleinere Werte von  $v$   $H(v)$  negativ wird. Will man über diesen Punkt Sicherheit erlangen, so bleibt nichts übrig, als, zur Diskussion von  $H(v)$ , zu einem speziellen Energieverteilungsgesetz zu greifen.

Wir benutzen hier das von M. Planck aufgestellte Energieverteilungsgesetz, in dem das Wiensche und das Rayleighsche Strahlungsgesetz als Spezialfälle enthalten sind. Nach diesem Gesetz ist

$$(26) \quad \mathfrak{R}_\nu = \frac{h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1},$$

wo  $h$  und  $k$  gewisse allgemeine Konstanten sind,

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

$\nu$  die Schwingungszahl,  $T$  die absolute Temperatur.

Legen wir dieses Gesetz hier zugrunde, dann ergibt sich:

$$H(\nu) = 2 \mathfrak{R}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu} = \frac{h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1} \left\{ \frac{\frac{h \nu}{k T} e^{\frac{h \nu}{k T}}}{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1} - 1 \right\}.$$

Für  $\nu = 0$  und  $\nu = \infty$  ist, wie wir wissen,  $H(\nu) = 0$ . Wir können diese beiden Werte aus der Betrachtung ausschalten. Setzen wir  $h \nu / k T = x$ , dann ist

$$H(\nu) = \frac{h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{(e^x - 1)^2} \{x \cdot e^x - e^x + 1\}.$$

Nun ist für  $x = 0$

$$g(x) = x \cdot e^x - e^x + 1 = 0.$$

Bildet man  $g'(x)$ , so ergibt sich

$$g'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x > 0 \quad \text{für } x > 0.$$

Also ist  $g(x)$  stets positiv. Damit ist bewiesen, daß  $H(\nu)$  stets positiv ist, wenn wir das oben angeführte Strahlungsgesetz zugrunde legen. Es ist dann also stets

$$(27) \quad \underline{I_{12} > I_{21}},$$

d. h. es geht während der Bewegung der Platte stets mehr Energie von der Seite der zusammengedrückten Strahlung durch die Platte nach oben, als umgekehrt, wie man auch  $a$  und  $b$  wählen mag.

In dem anfangs zitierten Abschnitt der Wienschen Abhandlung bedeuten nun  $a$  und  $b$  nicht, wie hier, Schwingungs-

zahlen, sondern Wellenlängen. Bezeichnen wir diese Werte für den Augenblick mit  $a'$  und  $b'$ , so soll, nach Wien  $a' < b'$  (Wellenlängen) sein.

Da nun hier in der ganzen Rechnung stets  $b > a$  (Schwingungszahlen!) angenommen ist, so müssen wir, um mit der Wienschen Bezeichnung im Einklang zu sein, setzen:

$$a' = \frac{c}{b}; \quad b' = \frac{c}{a}.$$

Nun soll ferner für die Strahlungsintensitäten der Wellenlängen  $a'$  und  $b'$  die Beziehung  $\varphi_{a'} > \varphi_{b'}$  bestehen, oder da allgemein

$$\varphi_1 = \frac{c R_1}{\lambda^3},$$

$$\frac{c R_b}{a'^3} > \frac{c R_a}{b'^3},$$

also

$$b^3 R_b > a^3 R_a.$$

Dann, sagt Wien, wird mehr Energie von der Seite, wo die Strahlung sich ausdehnt, nach der anderen Seite gelangen, als umgekehrt. Dies widerspricht offenbar unserem oben gefundenen Resultat, wonach, wie auch  $a$  und  $b$  gewählt seien, stets *weniger* Energie von der Seite der sich ausdehnenden Strahlung nach der anderen Seite gelangt, als umgekehrt! Sind die Wellen der Farbe  $a$  und  $b$  so lang, daß man für sie das Rayleighsche Strahlungsgesetz in Anwendung bringen kann, also  $R_\nu = (kT/c^2)\nu^3$  setzen kann, dann wird  $G(\nu) = 0$  und

$$(28) \quad I_{12} = I_{21}.$$

Im Grenzfall, für sehr lange Wellen, geht also ebensoviel Energie von unten nach oben, wie von oben nach unten. Nie aber wird  $I_{12} < I_{21}$ .

#### § 4.

Unser nächstes Ziel ist die Bestimmung der in der Zeit  $dt$  erfolgten gesamten Entropieänderung  $\delta S$  unseres Systems. Zu ihrer Berechnung verfahren wir, wie folgt:

Wir hatten gesehen: fällt ein Strahl der Schwingungszahl  $\nu$  unter dem Winkel  $\vartheta$  von unten auf die Platte, und liegt

$$\nu \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right)$$

außerhalb des Intervalles  $a \dots b$ , dann wird er reflektiert, und nach der Reflexion ist seine Schwingungszahl:

$$\nu \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Seine Schwingungszahl hat sich also um

$$2 \frac{v}{c} \nu \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} \nu$$

geändert. Setzen wir nun voraus, daß das Intervall  $d\nu$ , in dem die Energie des einfallenden Strahles vor der Reflexion liegt, klein ist gegen  $\nu \cdot v/c$ , dann findet sich diese Energie, nach der Reflexion, nicht mehr im Intervall  $d\nu$  vor; sie ist, sozusagen, durch Reflexion aus dem Intervall  $d\nu$  „hinausgeworfen“ und in ein anderes Intervall „hineinreflektiert“ worden.

Analoges gilt für die Strahlung über der Platte.

Betrachten wir nun die Änderung der in einem Intervall  $d\nu$  enthaltenen Strahlungsenergie auf einer Seite der Platte, so wird sich diese Änderung darstellen lassen in der Form der Differenz:

gewonnene Energie — verlorene Energie.

Verloren ist dem Intervall  $d\nu$  die gesamte einfallende Energie, denn sie wird zum Teil, wie wir soeben sahen, durch Reflexion aus dem Intervall  $d\nu$  „hinausgeworfen“, zum anderen Teil passiert sie die Platte.

Die gewonnene Energie besteht aus zwei Teilen: 1. der aus dem anderen Raum durch die Platte hereinkommenden Energie, 2. der durch Reflexion aus fremden Intervallen ins Intervall  $d\nu$  „hereinreflektierten“ Energie.

Wir können demnach die Energiegleichung in folgender Form ansetzen:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Änderung der Energie im Intervall } d\nu \\ \text{während der Zeit } dt \end{array} \right.$$

= „hereinreflektierte“ Energie + durch die Platte aus dem anderen Raum kommende Energie

— einfallende Energie.

Die einfallende Energie der Farbe  $\nu$  ist für Strahlen unter der Platte

$$(30) \quad 2\Omega_\nu d\nu \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\nu}{c}} \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{\nu}{c} \right) d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot F dt,$$

$$= 2\pi F dt \Omega_\nu d\nu \left( 1 + \frac{\nu}{c} \right)^2;$$

für Strahlung über der Platte ist sie

$$(31) \quad = 2\pi F dt \Omega_\nu d\nu \left( 1 - \frac{\nu}{c} \right)^2.$$

Die aus dem anderen Raum kommende Energie, d. h. die Energie der Strahlen, die die Platte durchsetzen, ist bei Gelegenheit der Berechnung von  $I_{12} - I_{21}$  im einzelnen<sup>1)</sup> berechnet worden. Es erübrigt noch, die aus fremden Intervallen ins Intervall  $d\nu$  „hereinreflektierte“ Energie zu bestimmen. Haben wir diese gefunden, so berechnet sich die Änderung der Energie im Intervall  $d\nu$  durch Einsetzen der drei Daten in die aufgestellte Energiegleichung (29). Hieraus bestimmt sich leicht für jedes  $\nu$  die Änderung der räumlichen Energiedichte ( $\delta u_\nu$ ) während der Zeit  $dt$ ; die  $\delta u_\nu$  liefern uns dann die während der Zeit  $dt$  erfolgte gesamte Entropieänderung unseres Systems ( $\delta S$ ).

Wir wissen: trifft ein Strahl der Farbe  $\nu_1$  unter dem Winkel  $\vartheta$  von unten auf die Platte, und wird er reflektiert, dann ändert sich seine Farbe, und es wird nach der Reflexion seine Schwingungszahl den Wert

$$\nu' = \nu_1 \left( 1 + 2 \frac{\nu}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{\nu^2}{c^2} \right)$$

annehmen.

Das Intervall  $d\nu_1$  wird durch die Reflexion zu:

$$d\nu' = d\nu_1 \left( 1 + 2 \frac{\nu}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{\nu^2}{c^2} \right).$$

Ist nun  $\nu' = \nu$  und  $d\nu' = d\nu$ , dann fällt die ganze Energie des Intervalles  $d\nu_1$  nach der Reflexion in unser Intervall  $d\nu$ , ist also ins Intervall  $d\nu$  „hereinreflektiert“ worden. Ist also

1) Vgl. die Originalarbeit.



$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = v_1 \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} \right) \\ \text{und} \\ dv = dv_1 \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} \right) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Unter der} \\ \text{Platte!} \end{array}$$

dann ist  $v_1$  nach der Reflexion von der Farbe  $v$  und liefert seine Energie dem Intervall  $dv$ .

Trifft  $v_1$  unter dem Winkel  $\vartheta$  auf, so wird, nach (19a), in der Zeit  $dt$  reflektiert eine Energie der Größe

$$2\mathfrak{R}_v dv_1 F dt d\varphi \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} \right) d\vartheta$$

oder nach (32)

$$(33) \quad = 2\mathfrak{R}_v dv F dt d\varphi \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) d\vartheta.$$

Nun ist, nach dem Taylorschen Satz

$$\mathfrak{R}_{v_1} = \mathfrak{R}_v + \frac{v_1 - v}{1!} \left( \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right)_v + \frac{(v_1 - v)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{R}_v}{\partial v^2} \right)_v + \dots,$$

wobei wir, da  $v_1 - v$  von der Ordnung  $v/c$  ist, nach unserer Voraussetzung die Entwicklung beim dritten Gliede abbrechen. Aus (32) folgt:

$$v_1 - v = -v \left\{ 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} - 4 \frac{v^3}{c^3} \cos^2 \vartheta \right\}.$$

Daher

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_{v_1} = \mathfrak{R}_v - 2v \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \cos \vartheta - 2v \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \\ \quad + 2 \frac{v^3}{c^3} \cos^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial v} \left( v^3 \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right). \end{array} \right.$$

Setzt man diesen Wert in (33) ein und multipliziert mit  $\cos \vartheta + v/c$ , dann fallen einige Glieder fort, und man erhält für die ins Intervall  $dv$  „hereinreflektierte“ Energie (geliefert durch Strahlen der Farbe  $v_1$  im Einfallswinkel  $\vartheta$ ):

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 F dt dv d\varphi \sin \vartheta d\vartheta \left\{ \mathfrak{R}_v \cos \vartheta + \mathfrak{R}_v \frac{v}{c} - 2v \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \cos^2 \vartheta \right. \\ \quad \left. - 4v \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \cos \vartheta + 2 \frac{v^3}{c^3} \cos^3 \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left( v^3 \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right) \right\}. \end{array} \right.$$

Es fallen nun aber die  $v_1$ -Strahlen auf die Platte unter allen Einfallswinkeln  $\vartheta$  zwischen

$$\vartheta = 0 \text{ und } \vartheta = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{v}{c};$$



nicht alle diese Strahlen werden reflektiert; denn in gewissen  $\vartheta$ -Richtungen passieren sie ja die Platte. Es empfiehlt sich daher, die Gesamtheit der  $\nu_1$  im bestimmte Intervalle zu teilen; jedem dieser Intervalle entspricht ein gewisses Intervall von Einfallswinkeln  $\vartheta$  folgender Beschaffenheit: liegt der Einfallswinkel des Strahles  $\nu_1$  innerhalb dieses  $\vartheta$ -Intervalles, so wird  $\nu_1$  reflektiert, liegt er außerhalb, so passiert der Strahl die Platte. Wir nennen dieses Intervall „das für  $\nu_1$  charakteristische  $\vartheta$ -Intervall“.

Nun sieht man ohne weiteres, daß die oben in (35) angegebene „hereinreflektierte“ Energie dem Intervall  $d\nu$  von einer ganzen Reihe von  $\nu_1$ -Strahlen geliefert wird, jedesmal unter dem entsprechenden Einfallswinkel  $\vartheta$ . Und zwar könnte nach (32) jedes  $\nu$  geliefert werden von jedem  $\nu_1$  zwischen

$$\nu_1 = \nu \left( 1 - 2 \frac{\nu}{c} + 2 \frac{\nu^2}{c^2} \right) \quad \text{und} \quad \nu_1 = \nu$$

im Einfallswinkel

$$\vartheta = \arccos \left[ \frac{1}{2} \frac{c}{\nu} \left( \frac{\nu}{\nu_1} - 2 \frac{\nu^2}{c^2} - 1 \right) \right].$$

Liefert diese Beziehung, für das entsprechende  $\nu_1$ , einen  $\vartheta$ -Wert, der in das für  $\nu_1$  „charakteristische“  $\vartheta$ -Intervall fällt, dann trägt dies  $\nu_1$  mit seiner Energie zu der „hereinreflektierten“ Energie bei.

Das Problem lautet also jetzt, wie folgt: welche  $\nu_1$ -Strahlen liefern durch Reflexion ein bestimmtes  $\nu$ , oder anders ausgedrückt: in welchen Richtungen  $\vartheta$  müssen die  $\nu_1$ -Strahlen einfallen, um nach der Reflexion ein bestimmtes  $\nu$  zu liefern?

Haben wir demgemäß für alle  $\nu$  diese  $\vartheta$  bestimmt und den Ausdruck (35) nach  $\vartheta$  und  $\varphi$  entsprechend integriert, so haben wir damit die „hereinreflektierte“ Energie gewonnen.

Für den Raum über der Platte ist die Berechnung analog.

Vor Ausführung der Bewegung ist nun die Energie der Farbe  $\nu$  unter und über der Platte

$$= \nu u, d\nu.$$

Ist nach vollzogener Bewegung der Ausgleich der Strahlungsintensität nach allen Richtungen (durch diffuse Reflexion

an den weißen Wänden) eingetreten, so ist nun die Energie der Farbe  $\nu$

$$= (V - Fv dt)(u_\nu + \delta u_\nu) d\nu \text{ unter der Platte,}$$

$$(V + Fv dt)(u_\nu + \delta u_\nu) d\nu \text{ über der Platte.}$$

Die Änderung der Energie im Intervall  $d\nu$  während der Zeit  $dt$  ist daher

$$= (V - Fv dt) \delta u_\nu d\nu - Fv dt u_\nu d\nu \text{ unter der Platte}$$

und

$$= (V + Fv dt) \delta u_\nu d\nu + Fv dt u_\nu d\nu \text{ über der Platte.}$$

Nun haben wir alle Daten beisammen, um die oben in (29) aufgestellte Energiegleichung für die einzelnen Schwingungszahlen anzusetzen. Daraus ergibt sich dann  $\delta u_\nu$  für jedes  $\nu$ .

Es findet dabei, wie es zu erwarten ist, die Verschiebung der Energieverteilung auf die einzelnen Farben nicht gleichmäßig statt.

Am stärksten beeinflusst werden natürlich die Farben, die ganz außerhalb des von der Platte durchgelassenen Farbenintervalles liegen, und zwar möglichst weit von den Grenzen; ihre Energieverteilung ändert sich ebenso, als wenn sie von einem vollkommenen Spiegel reflektiert würden. Die Farben, die zwischen  $a$  und  $b$  liegen, werden der Hauptsache nach durch die Bewegung der Platte nicht beeinflusst. Ihre spezifische Energiedichte ist bei der Bewegung konstant ( $\delta u_\nu = 0$ ), und ihre gesamte Energie ändert sich nur nach Maßgabe der Volumänderung. In der Nähe der Farben  $a$  und  $b$  selbst, also in der Nähe der Grenzen des durchgelassenen Farbenintervalles treten gewisse Übergangsgebiete auf.

Nun war nach (3) die Gesamtentropie der Strahlung

$$(36) \quad S = S_1 + S_2,$$

wo  $S_1$  die Entropie der Strahlung unter der Platte,  $S_2$  die Entropie der Strahlung über der Platte im Anfangszustand bezeichneten. Sind also  $s_1$  und  $s_2$  die entsprechenden räumlichen Entropiedichten, so können wir setzen:

$$(37) \quad S_1 = V \cdot s_1 = S_2 = V \cdot s_2.$$

Die durch die Bewegung hervorgerufenen Änderungen der Strahlungsentropien sind daher:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta S_1 = (V - Fv dt)(s_1 + \delta s_1) - V \cdot s_1 \\ \quad = (V - Fv dt)\delta s_1 - Fv dt \cdot s_1 \\ \text{und} \\ \delta S_2 = (V + Fv dt)\delta s_2 + Fv dt \cdot s_2. \end{array} \right. \quad (81)$$

Also ergibt sich nach (36) für die gesamte Entropieänderung

$$(39) \quad \delta S = \delta S_1 + \delta S_2 = (V - Fv dt)\delta s_1 + (V + Fv dt)\delta s_2.$$

Bezeichnet  $\bar{s}_\nu \cdot d\nu$  die Entropie der in der Volumeinheit enthaltenen Strahlung zwischen den Schwingungszahlen  $\nu$  und  $\nu + d\nu$ , so können wir setzen<sup>1)</sup>

$$(40) \quad s_1 = \int_0^\infty \bar{s}_{\nu_1} d\nu, \quad s_2 = \int_0^\infty \bar{s}_{\nu_2} d\nu.$$

Die  $\bar{s}_\nu$  sind dabei bestimmte Funktionen der  $\nu$  und  $u_\nu$ . Es folgt aus (40) unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$(41) \quad \delta s_1 = \delta \int_0^\infty \bar{s}_{\nu_1} d\nu = \int_0^\infty \delta \bar{s}_{\nu_1} d\nu = \int_0^\infty \frac{\partial \bar{s}_\nu}{\partial u_\nu} \delta u_\nu d\nu,$$

da  $\nu$  unvariirt bleibt.  $\delta u_\nu$  ist dabei die oben im einzelnen berechnete Änderung der spezifischen monochromatischen Energiedichte unter der Platte.

Die Glieder, die in der Entwicklung von  $\delta \bar{s}_{\nu_1}$  höhere Potenzen von  $\delta u_\nu$  aufweisen, fallen fort, da  $\delta u_\nu$  den Faktor  $dt$  im Zähler und das beliebig groß zu wählende  $V$  im Nenner enthält.

Nun ist bekanntlich<sup>2)</sup>

$$(42) \quad \frac{\partial \bar{s}_\nu}{\partial u_\nu} = \frac{1}{T},$$

wo  $T$  die absolute Temperatur der monochromatischen Strahlung von der Farbe  $\nu$  ist. Setzt man diesen Wert in (41) ein, und beachtet, daß die ursprünglich herrschende Strahlung die

1) Vgl. M. Planck, Theorie d. Wärmestrahlung p. 87. Formel (113).

2) M. Planck, l. c. p. 88. Formel (117).

„schwarze“ Strahlung war, so tritt  $1/T$  vor das Integralzeichen, und man erhält:

$$(43) \quad \delta s_1 = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \delta u_{r_1} dv.$$

Analog

$$(43a) \quad \delta s_2 = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \delta u_{r_2} dv,$$

wo der Index 2 sich auf den Raum über der Platte bezieht.

Unter Benutzung von (43) und (43a) wird (39) schließlich:

$$(44) \quad \delta S = \frac{V - Fv dt}{T} \int_0^{\infty} \delta u_{r_1} dv + \frac{V + Fv dt}{T} \int_0^{\infty} \delta u_{r_2} dv.$$

Setzen wir hier für  $\delta u_{r_1}$  und  $\delta u_{r_2}$  die oben berechneten Werte ein, so erhalten wir nach Ausführung der Integration:

$$(45) \quad \delta S = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \left\{ 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v dv + 4 \int_b^{\infty} \mathfrak{R}_v dv + b \mathfrak{R}_b - a \mathfrak{R}_a \right\}.$$

Dies ist die Änderung der Gesamtentropie bei unserer Bewegung. Wie man sieht, ist sie von der Ordnung  $v^2/c^2$ . Bei einer Vertauschung von  $v$  mit  $-v$ , d. h. bei einer Umkehrung der Plattenbewegung, kehrt daher  $\delta S$  sein Vorzeichen nicht um, wie es natürlich ist.

Der Wert von  $\delta S$  ist unabhängig von einem speziellen Energieverteilungsgesetz abgeleitet worden.

Zur Entscheidung über das Vorzeichen von  $\delta S$  kann man zu einem speziellen Strahlungsgesetz greifen. Wir benutzen hier wieder das Gesetz (26), wonach

$$\mathfrak{R}_v = \frac{h v^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h v}{k T}} - 1}.$$

Setzt man in (45)  $b = \infty$ , dann wird

$$\delta S = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \left\{ 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v dv - a \mathfrak{R}_a \right\} = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \Phi(a),$$

wenn

$$(46) \quad \Phi(\nu) = 4 \int_0^\nu \mathfrak{R}_\nu d\nu - \nu \mathfrak{R}_\nu,$$

ist. Nun ist

$$\Phi(0) = 0; \quad \frac{d\Phi}{d\nu} = 3\mathfrak{R}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu},$$

oder wenn man den Wert von  $\mathfrak{R}_\nu$  einsetzt:

$$(47) \quad \frac{d\Phi}{d\nu} = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{\frac{h\nu}{kT} e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} > 0.$$

Daher ist  $\Phi(a)$  sicher  $> 0$  und ferner auch

$$(48) \quad \Phi(b) > \Phi(a).$$

Für jedes  $b < \infty$  kommen zu dem Ausdruck

$$\frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \Phi(a)$$

in  $\delta S$  noch positive Glieder hinzu, so daß allgemein stets

$$\delta S > 0$$

ist. Es ist aber, um zu erweisen, daß

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 3\mathfrak{R}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu} > 0$$

ist, nicht nötig, zu einem speziellen Energieverteilungsgesetz zu greifen. Führt man nämlich unseren Prozeß mit einem vollkommenen Spiegel aus, und zwar mit so kleiner Geschwindigkeit, daß man Größen der Ordnung  $v^3/c^2$  vernachlässigt, so ist die Änderung der spezifischen Energiedichte  $u_\nu$  unter dem Spiegel für alle  $\nu$ :

$$\delta u_\nu = \frac{\delta V}{V} \left( \frac{\nu}{3} \frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} - u_\nu \right).$$

$\delta u_\nu$  muß positiv sein, denn es ist an jeder monochromatischen Strahlung unter dem Spiegel von außen Arbeit geleistet worden. Daher ist, weil  $\delta V = -Fvdt$ ,

$$u_\nu - \frac{\nu}{3} \frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} > 0$$

und auch

$$3\mathfrak{R}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu} = \frac{d\Phi}{d\nu} > 0.$$

1) Vgl. auch M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. p. 80, Gleichung (95).

Es gilt also stets

$$(49) \quad \delta S > 0,$$

d. h.: *unser Prozeß ist irreversibel!*

Für  $a = b$  wird

$$(50) \quad \delta_0 S = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^3}{c^2} \cdot 4 \int_0^\infty \mathfrak{R}_v dv = \frac{8\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \cdot K,$$

oder da

$$\frac{4\pi K}{c} = u$$

die räumliche Energiedichte der Anfangsstrahlung ist,

$$(51) \quad \delta_0 S = 2 F v dt \frac{v}{c} \frac{u}{T} = \frac{8}{2} F v dt \frac{v}{c} s.$$

Dies ist der Wert der Entropiezunahme, wenn unsere Platte speziell für keine Farbe durchlässig, d. h. ein vollkommener Spiegel ist.

Da wir (45) unter Benutzung von (46) in der Form schreiben können

$$(45a) \quad \delta S = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \{2K - [\Phi(b) - \Phi(a)]\},$$

so erhellt, mit Rücksicht auf (48), daß  $\delta S$  für den Fall des vollkommenen Spiegels ( $b = a$ ) seinen größten Wert erreicht.

Wir sehen also, daß unsere Bewegung, ausgeführt mit einem vollkommenen Spiegel, eine gewisse maximale Entropiezunahme der Größenordnung  $v^2$  ergibt, d. h. ein irreversibler Vorgang ist.

Führen wir dagegen diesen Prozeß so langsam aus, daß wir auch schon die zweite Potenz von  $v/c$  vernachlässigen können, dann wird sowohl für den Spiegel, als auch allgemein für unsere Platte

$$\delta S = 0.$$

Der Prozeß ist dann reversibel.

Es ist jedoch zu beachten, daß das Moment der Irreversibilität im ersten Falle nicht in der endlichen Geschwindigkeit des Spiegels oder der Platte liegt, denn die Reflexion der Strahlung an einem bewegten vollkommenen Spiegel<sup>1)</sup>, ebenso wie die freie Ausbreitung der Strahlung<sup>2)</sup>, ist ein reversibler

1) M. Abraham, Elektromagn. Theorie d. Strahlung. p. 356.

2) M. Planck, Theorie d. Wärmestrahlung. p. 168, 169; M. Abraham, Elektromagn. Theorie d. Strahlung. p. 352.

Prozeß. Das Moment der Irreversibilität liegt vielmehr in dem Ausgleich der Strahlungsenergie nach allen Richtungen:  $\delta S$  ist ja gerade unter der Annahme berechnet worden, daß dieser Ausgleich sich vollzogen hat. Die Unregelmäßigkeiten und Vorzugsrichtungen, die durch die Bewegung des Spiegels oder der Platte entstanden sind, sind infolge der diffusen Reflexion an den Wänden verschwunden. Von dieser ausgleichenden, diffusen Reflexion rührt die Irreversibilität des Vorganges her, nicht von der Reflexion am bewegten Spiegel, oder von der freien Ausbreitung durch die Platte. Ist der Spiegel oder die Platte dagegen mit unendlich kleiner Geschwindigkeit bewegt worden, so sind die durch die Bewegung entstandenen Unregelmäßigkeiten der Strahlung und ebenso daher auch der Einfluß des Ausgleiches von höherer Ordnung. Es wird dann das Moment der Irreversibilität klein von höherer Ordnung, d. h. der Vorgang ist reversibel.

Wir werden weiter unten zeigen, daß man das in (50) ausgesprochene Resultat auch auf direktem Wege bestätigt, indem man von vornherein die Bewegung mit einem vollkommenen Spiegel ausführt. Der Gang der Untersuchung soll jedoch hier nicht unterbrochen werden.

Nach der in (49) aufgestellten Beziehung können wir sagen: Ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz, etwa im Negativwerden von  $\delta S$ , liegt bisher nicht vor.

Wir wollen aber das Problem noch weiter verfolgen.

### § 5.

Die Arbeit, die wir während unseres Prozesses von außen geleistet haben, ist nach (4) gleich der Änderung der Gesamtenergie

$$A = \delta U.$$

$\delta U$  setzt sich additiv zusammen aus der Änderung der Energie unter der Platte  $\delta U_1$  und der Änderung der Energie über der Platte  $\delta U_2$ , also

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2.$$

Nun ist

$$\delta U_1 = (F - Fvdt)(u_1 + \delta u_1) - Fu_1,$$

$$\delta U_2 = (F + Fvdt)(u_2 + \delta u_2) - Fu_2,$$



wo  $u_1$  und  $u_2$  die räumlichen Energiedichten unter und über der Platte im Anfangszustand sind. Daraus folgt, da  $u_1 = u_2$

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 = (V - Fvdt)\delta u_1 + (V + Fvdt)\delta u_2$$

oder

$$\delta U = (V - Fvdt) \int_0^\infty \delta u_v dv + (V + Fvdt) \int_0^\infty \delta u_v dv.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (44), so ergibt sich sofort:

$$(52) \quad \delta U = A = T \cdot \delta S,$$

in Worten: die von außen an der Strahlung geleistete Arbeit ist gleich der gesamten Entropieänderung, multipliziert mit der Temperatur der ursprünglich herrschenden schwarzen Strahlung.

Es ist also die von uns aufgewendete Arbeit nach (52) und (45)

$$(53) \quad A = 4\pi Fdt \frac{v^2}{c^2} \left\{ 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v dv + 4 \int_b^\infty \mathfrak{R}_v dv + b \mathfrak{R}_b - a \mathfrak{R}_a \right\}.$$

Aus (52) und (53) folgt:  $A$  ist stets positiv, d. h. es wird stets von außen Arbeit geleistet.

Für  $a = b$  (Spiegel) hat  $A$  seinen größten Wert

$$(54) \quad A_0 = 8\pi Fdt \frac{v^2}{c^2} K.$$

Auch dieses Resultat werden wir, wie oben angedeutet, später auf direktem Wege verifizieren.

Ist die Geschwindigkeit  $v$  unendlich klein, so werden  $A$  und  $A_0 = 0$ , d. h.: um die Bewegung mit unendlich kleiner Geschwindigkeit auszuführen, ist kein merklicher Arbeitsaufwand nötig. In diesem Fall ist, wie wir sahen, unser Prozeß reversibel.

Auf die Beziehung (52) gestützt sind wir imstande,  $\delta S$  durch die Berechnung von  $A$  abzuleiten.

Wir können offenbar setzen:

$$(55) \quad A = A_1 - A_2,$$

wo  $A_1$  die Arbeit ist, die man von außen an der Strahlung



unter der Platte leistet,  $A_2$  die Arbeit, die man von der Strahlung über der Platte gewinnt.

Nun wissen wir: fällt ein Strahl der Farbe  $\nu$  aus dem Kegel  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  unter dem Einfallswinkel  $\vartheta$  von unten auf die Fläche  $F$  der Platte, so führt er nach (16) in der Zeit  $dt$  eine Energie an die Platte:

$$I_1 = 2\Re, d\nu \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) d\vartheta d\varphi F dt.$$

Wird er reflektiert, so wird eine Energie  $I_2 > I_1$  zurückgeworfen, und zwar ist nach (19 a)

$$I_2 = 2\Re, d\nu \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} \right) d\vartheta d\varphi F dt.$$

Es ist also an dem Strahl der Farbe  $\nu$ , der unter dem Winkel  $\vartheta$  einfiel, bei der Reflexion von außen eine Arbeit geleistet worden

$$I_2 - I_1 = 4\Re, d\nu \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right)^2 \frac{v}{c} d\vartheta d\varphi F dt.$$

Nun entspricht aber, wie wir oben sahen, jedem Strahl der Farbe  $\nu$  ein „charakteristisches“ Intervall von Einfallswinkeln  $\vartheta$  derart, daß der Strahl nur dann reflektiert wird, wenn sein Einfallswinkel innerhalb dieses Intervalls liegt. In jedem anderen Fall wird der Strahl von der Platte ungehindert hindurchgelassen, und es wird daher keine Arbeit an ihm geleistet.

Integriert man daher unseren Ausdruck  $I_2 - I_1$  nach  $\vartheta$  zwischen den durch das „charakteristische“ Intervall bestimmten Grenzen und führt auch die entsprechenden Integrationen nach  $\nu$  aus, dann ergibt sich offenbar  $A_1$ .

Für den Raum über der Platte gilt analoges. Hier ist die von der Strahlung der Farbe  $\nu$ , die unter dem Winkel  $\vartheta$  einfällt, geleistete Arbeit:

$$-(I_2 - I_1) = 4\Re, d\nu \sin \vartheta \left( \cos \vartheta - \frac{v}{c} \right)^2 \frac{v}{c} d\vartheta d\varphi F dt.$$

Durch Integration über die „charakteristischen“  $\vartheta$  und die entsprechenden  $\nu$  gewinnen wir  $A_2$ .

Bildet man nun  $A = A_1 - A_2$ , und läßt Größen der Ordnung  $v^3/c^3$  und Größen höherer Ordnung fort, so ergibt sich:

$$(56) \quad A = 4\pi F dt \frac{v^2}{c^2} \left\{ 4 \int_0^a \Re, d\nu + 4 \int_b^\infty \Re, d\nu + b \Re_b - a \Re_a \right\}.$$

Nun war nach (52)

$$\delta S = \frac{A}{T};$$

also

$$(57) \quad \delta S = \frac{4\pi Fdt}{T} \frac{v^2}{c^2} \left\{ 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v d\nu + 4 \int_b^\infty \mathfrak{R}_v d\nu + b \mathfrak{R}_b - a \mathfrak{R}_a \right\}.$$

(56) und (57) stimmen, wie man sieht, mit den in (53) und (45) erhaltenen Resultaten überein.

### § 6.

Wir wollen nun, nachdem unsere Bewegung mit der Platte zum Ende geführt ist, uns die Platte durch einen vollkommenen Spiegel ersetzt denken und nach vollzogenem Ausgleich der Strahlung mit diesem Spiegel die Bewegung zurück ausführen, wieder mit der Geschwindigkeit  $v$ .

Wir berechnen die dabei geleistete Arbeit.

Unter dem Spiegel ist die Strahlung komprimiert, daher wird sie an dem Spiegel während der Bewegung eine Arbeit  $A'_1$  leisten. Gegen die oberhalb des Spiegels befindliche, dilatierte Strahlung werde die Arbeit  $A'_2$  von außen geleistet, so daß im ganzen von außen eine Arbeit

$$(58) \quad A' = A'_2 - A'_1$$

geleistet wird.

Beim Beginn der Bewegung besitzt jeder Strahl der Farbe  $\nu$  eine spezifische Strahlungsintensität  $\mathfrak{R}_\nu$ , die nicht mehr der „schwarzen“ Strahlung entspricht, sondern es ist allgemein:

$$(59) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_\nu' = \mathfrak{R}_\nu + \delta \mathfrak{R}_\nu, \\ \delta \mathfrak{R}_\nu = \frac{c}{8\pi} \delta u_\nu. \end{cases} \quad \text{wo}$$

Die  $\delta u_\nu$  sind nun aber oben für die einzelnen  $\nu$  berechnet worden; es sind also alle  $\mathfrak{R}_\nu'$  bekannt.

Es fällt nach (22) von unten auf den vor der Strahlung zurückweichenden Spiegel von allen Seiten eine Energie der Farbe  $\nu$

$$\begin{aligned} I'_1 &= 2 \mathfrak{R}_\nu' d\nu \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{v}{c}} \sin \vartheta \left( \cos \vartheta - \frac{v}{c} \right) d\vartheta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot Fdt \\ &= 2\pi \mathfrak{R}_\nu' d\nu Fdt \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^2. \end{aligned}$$

Reflektiert wird nach (23) eine Energiemenge:

$$I_1'' = 2\pi \mathfrak{R}_v' dv \int_0^{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{v}{c}} d\varphi Fdt \int_{\vartheta=0}^{\vartheta} \sin \vartheta \left( \cos \vartheta - \frac{v}{c} \right) \left( 1 - 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} \right) d\vartheta, \\ = 2\pi \mathfrak{R}_v' dv Fdt \left\{ \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^2 - \frac{4}{3} \frac{v}{c} + 4 \frac{v^2}{c^2} \right\}.$$

Es ist, wie man sieht, die reflektierte Energie kleiner als die einfallende, und zwar beträgt die Differenz:

$$\frac{8\pi}{3} \mathfrak{R}_v' dv Fdt \frac{v}{c} \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \right).$$

Diese Differenz ist die Arbeit, die die Strahlung der Schwingungszahl  $\nu$  an dem Spiegel geleistet hat. Es wird daher im ganzen:

$$(60) \quad A_1' = \frac{8\pi}{3} Fdt \frac{v}{c} \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \right) \int_0^{\infty} (\mathfrak{R}_\nu + \delta \mathfrak{R}_\nu) d\nu.$$

Analog

$$(61) \quad A_2' = \frac{8\pi}{3} Fdt \frac{v}{c} \left( 1 + 3 \frac{v}{c} \right) \int_0^{\infty} (\mathfrak{R}_\nu + \delta \mathfrak{R}_\nu) d\nu,$$

wo wieder der Index 1 sich auf den unteren, der Index 2 auf den oberen Raum bezieht.

Daher:

$$A' = A_2' - A_1' =$$

$$8\pi Fdt \frac{v^2}{c^2} K + \frac{8\pi}{3} Fdt \frac{v}{c} \left\{ \int_0^{\infty} \delta \mathfrak{R}_\nu d\nu - \int_0^{\infty} \delta \mathfrak{R}_\nu d\nu \right\},$$

wenn man die Glieder der Ordnung  $v^3/c^3$  vernachlässigt.  $K$  ist dabei gleich

$$2 \int_0^{\infty} \mathfrak{R}_\nu d\nu,$$

d. h. die gesamte Strahlungsintensität der unpolarisierten Strahlung.

Unter Berücksichtigung von (59) und den oben für  $\delta u$ , erhaltenen Werten ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} \delta \mathfrak{R}_2 dv - \int_0^{\infty} \delta \mathfrak{R}_1 dv = \frac{2}{3} \frac{F v dt}{V} \left\{ a \mathfrak{R}_a - b \mathfrak{R}_b - 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v dv - 4 \int_b^{\infty} \mathfrak{R}_v dv \right\}.$$

So erhalten wir schließlich:

$$(62) \quad \left\{ \frac{A' = 8 \pi F dt \frac{v^2}{c^2} \left\{ K - \frac{2}{9} \frac{F c dt}{V} \left[ 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v dv + 4 \int_b^{\infty} \mathfrak{R}_v dv + b \mathfrak{R}_b - a \mathfrak{R}_a \right] \right\}}{+ 4 \int_b^{\infty} \mathfrak{R}_v dv + b \mathfrak{R}_b - a \mathfrak{R}_a} \right\}.$$

Die eckige Klammer kann man auf die Form

$$[\dots] = [2K - (\Phi(b) - \Phi(a))]$$

bringen, wo wieder, wie in (46)

$$\Phi(v) = 4 \int_0^v \mathfrak{R}_v dv - v \cdot \mathfrak{R}_v$$

gesetzt ist.

Nun hatten wir in (48) gesehen, daß stets  $\Phi(b) > \Phi(a)$  ist.

Die eckige Klammer hat daher ihren größten Wert, und damit  $A'$  seinen kleinsten für den Fall:  $a = b$ . Dann ist:

$$(63) \quad A'_0 = 8 \pi F dt \frac{v^2}{c^2} K \left\{ 1 - \frac{4}{9} \frac{F c dt}{V} \right\}.$$

Nach Formel (1) war:

$$c dt < 2l - v dt,$$

$$\text{a fortiori } c dt < 2l, \text{ wo } l = \frac{V}{F}.$$

Daher:

$$\frac{F c dt}{V} < 2,$$

und

$$1 - \frac{4}{9} \frac{F c dt}{V} > \frac{1}{9}.$$

Es ist also:

$$(64) \quad A'_0 > 0$$

und daher a fortiori

$$(65) \quad \underline{A' > 0}.$$

$A'$  ist also stets positiv, d. h. es ist stets notwendig, von außen Arbeit an der Strahlung zu leisten, wenn man mit einem vollkommenen Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung mit derselben Geschwindigkeit  $v$ , wie den Hinweg, zurücklegt.

Dies in (65) ausgesprochene Resultat, insbesondere der in (64) enthaltene Spezialfall, erscheint beim ersten Anblick auffallend. Es ist nämlich durch die erste Bewegung die Energiedichte im unteren Raum vergrößert, im oberen Raum verkleinert worden. Dies ist ohne weiteres evident, falls man die erste Bewegung mit einem vollkommenen Spiegel ausführte; für unsere durchlässige Platte ergibt sich dies Resultat, wenn wir aus den oben angegebenen Werten von  $\delta u$ , durch Integration die Werte von

$$\delta u_1 = \int_0^{\infty} \delta u_v d\nu$$

und

$$\delta u_2 = \int_0^{\infty} \delta u_v d\nu$$

berechnen. Es folgt dann:

$$\delta u_1 = \frac{2\pi Fdt}{V - Fvdt} \left( \frac{4}{3} + \frac{v}{c} \right) \frac{v}{c} \left\{ 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v d\nu + 4 \int_b^{\infty} \mathfrak{R}_v d\nu + b \mathfrak{R}_b - a \mathfrak{R}_a \right\}.$$

$$\delta u_2 = - \frac{2\pi Fdt}{V + Fvdt} \left( \frac{4}{3} - \frac{v}{c} \right) \frac{v}{c} \left\{ 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v d\nu + 4 \int_b^{\infty} \mathfrak{R}_v d\nu + b \mathfrak{R}_b - a \mathfrak{R}_a \right\}.$$

Also  $\delta u_1 > 0$ ;  $\delta u_2 < 0$  und daher

$$u_1' (= u + \delta u_1) > u_2' (= u + \delta u_2).$$

D. h. vor Beginn der zweiten (Rück-)Bewegung ist im unteren Raum die Dichte der Energie größer als im oberen Raum (trotzdem bei der ersten Bewegung mehr Energie durch die Platte von unten nach oben ging, als umgekehrt!).

Nun könnte man argumentieren, wie folgt: Die Energiedichte im unteren Raum ist größer als im oberen; der Strah-

lungsdruck ist aber der Energiedichte proportional. Daher ist der beim Rückweg verwendete Spiegel einem Überdruck von unten ausgesetzt, und man sollte daher denken, daß die zweite (Rück-) Bewegung keinen Aufwand, sondern einen Gewinn von Arbeit bedingt.

Diese Argumentation enthält jedoch einen Fehler: Es ist nämlich der Strahlungsdruck auf einen bewegten Spiegel nicht allein von der Energiedichte, sondern auch von der Bewegung des Spiegels abhängig.

In der Tat, schreibt man (60) und (61) in der Form:

$$A_1' = \frac{1}{3} F v dt \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \right) u_1' = -p_1' \delta V_1,$$

$$A_2' = \frac{1}{3} F v dt \left( 1 + 3 \frac{v}{c} \right) u_2' = -p_2' \delta V_2,$$

wo  $u_1'$  und  $u_2'$  die räumlichen Energiedichten vor Beginn der zweiten Bewegung  $p_1'$  und  $p_2'$  die Strahlungsdrucke,  $\delta V_1$  bzw.  $\delta V_2$  die Volumänderungen unter und über dem Spiegel sind, so ergibt sich

$$(66) \quad p_1' = \frac{1}{3} u_1' \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \right),$$

$$(67) \quad p_2' = \frac{1}{3} u_2' \left( 1 + 3 \frac{v}{c} \right).$$

Nun ist zwar, infolge der ersten Bewegung der Platte,

$$u_1' > u_2',$$

wie wir sahen.

Trotzdem ist jedoch  $A_1'$  nicht größer, sondern kleiner als  $A_2'$ , denn es macht sich eben in  $A_1'$  und  $A_2'$  der Einfluß der Bewegung geltend. Das scheinbare Paradoxon, daß, trotzdem die Strahlungsdichte  $u_1'$  unter dem Spiegel größer ist als über dem Spiegel ( $u_2'$ ), es doch eines *Arbeitsaufwandes* von außen bedarf, um den Spiegel in seine Anfangslage zurückzuführen, erklärt sich also durch die Bewegung des Spiegels selbst, infolge derer der Druck der über dem Spiegel befindlichen Strahlung auf den ihr entgegenkommenden Spiegel gerade infolge dieser Bewegung größer ist als der Druck der Strahlung

1) Vgl. auch M. Abraham, Elektromag. Theorie der Strahlung p. 351.

im unteren Raume auf den gleichsam vor ihr zurückweichen-  
den Spiegel; in Zeichen:

$$p_2' \left[ = \frac{1}{3} u_2' \left( 1 + 3 \frac{v}{c} \right) \right] > p_1' \left[ = \frac{1}{3} u_1' \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \right) \right].$$

Wir verifizieren diese Ungleichung, indem wir zeigen, daß  
ihre weitere Umgestaltung zu einer bekannten Relation führt.  
Beachten wir, daß wir in dieser Rechnung nur bis zu Gliedern  
der Ordnung  $v/c$  zu entwickeln brauchen (da ja der Ausdruck  
der Arbeit überall nur bis zu Gliedern der Ordnung  $v^2/c^2$ ,  
und daher der Strahlungsdruck nur bis zu Gliedern der Ord-  
nung  $v/c$  entwickelt ist), so können wir obige Ungleichung  
umgestalten, wie folgt:

$$\begin{aligned} u_2' \left( 1 + 3 \frac{v}{c} \right) &> u_1' \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \right) \\ (u + \delta u_2) \left( 1 + 3 \frac{v}{c} \right) &> (u + \delta u_1) \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \right) \\ 6 u \frac{v}{c} &> \delta u_1 - \delta u_2. \end{aligned}$$

Nun ist, wie wir oben sahen, unter Vernachlässigung der  
Glieder höherer Ordnung:

$$\delta u_1 = \frac{8\pi F d t}{3V} \frac{v}{c} \{2K - [\Phi(b) - \Phi(a)]\},$$

$$\delta u_2 = - \frac{8\pi F d t}{3V} \frac{v}{c} \{2K - [\Phi(b) - \Phi(a)]\},$$

wo  $\Phi(v)$  die aus (46) ersichtliche Bedeutung

$$\Phi(v) = 4 \int_0^v \mathfrak{R}_r dv - v \cdot \mathfrak{R}_r$$

hat. Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich:

$$6 u \frac{v}{c} > \frac{16\pi F d t}{3V} \{2K - [\Phi(b) - \Phi(a)]\}$$

oder, unter Benutzung von

$$u = \frac{4\pi K}{c}$$

$$3K > \frac{2}{3} \frac{F c d t}{V} \{2K - [\Phi(b) - \Phi(a)]\}.$$

Der Maximalwert der rechten Seite (für  $a = b$ ) ist

$$\frac{4}{3} \frac{F c d t}{V} K < \frac{8}{3} K$$

nach (1). Daher besteht die Ungleichung a fortiori: es ist in der Tat

$$p'_1 > p'_i \quad \text{und daher} \quad A'_1 > A'_i.$$

Aus alledem folgt, daß wir bei unserem Prozeß im ganzen (d. h. beim Hin- und Rückweg) nicht etwa Arbeit gewinnen, sondern im Gegenteil eine positive Arbeit von der Größe

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} A + A' &= 4\pi F d t \frac{v^3}{c^3} \left\{ 4K \left( 1 - \frac{2}{9} \frac{F c d t}{V} \right) \right. \\ &\quad \left. - [\Phi(b) - \Phi(a)] \left( 1 - \frac{4}{9} \frac{F c d t}{V} \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

leisten.

Ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz, wie ihn Wien, in dem anfangs zitierten Abschnitt, zum Beweise der theoretischen Unmöglichkeit unserer durchlässigen Platte aufstellt, scheint mir hiernach nicht vorzuliegen. Denn die Argumentation, daß,

„wenn man mit dem Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung zurücklegt, [infolge des Überdruckes] mehr Arbeit gewonnen wird, als für die Bewegung der Platte aufgebracht wurde“,

ist nach dem obigen nicht zutreffend.

#### § 7.

Wir wollen am Schlusse noch eine naheliegende Erweiterung unseres Problems behandeln, indem wir die Eigenschaften unserer durchlässigen Platte nicht mehr in der Weise beschränken, wie es bisher geschehen ist.

War die Durchlässigkeit der ruhenden Platte bisher streng auf die Farben des Intervalls  $a \dots b$  beschränkt, während allen anderen Farben gegenüber die Platte sich wie ein vollkommener Spiegel verhielt, so wollen wir jetzt die Durchlässigkeit der Platte (wenn sie ruht) so bestimmen, daß für alle Strahlen der Schwingungszahl  $\nu$  die Beziehung gilt:

$$(69) \quad \text{Durchgelassene Energie} = f(\nu) \text{ Einfallende Energie.}$$

Dabei ist  $f(\nu)$  eine beliebige eindeutige, endliche, stetige oder unstetige positive Funktion von  $\nu$ , und es gilt, wie leicht ersichtlich:

$$(70) \quad 0 \leq f(\nu) \leq 1.$$



Um das Problem nicht zu sehr zu komplizieren, nehmen wir an, es sei die Funktion  $f(v)$ , die wir den Durchlässigkeitskoeffizienten nennen können, von der Richtung und Polarisation der einfallenden Strahlung unabhängig und nur Funktion der Farbe  $v$  allein.

Die durch (69) charakterisierte Platte läßt also von den Strahlen aller Farben einen gewissen, nur von der Farbe abhängigen, Bruchteil hindurch, den Rest reflektiert sie wie ein vollkommener Spiegel. Man sieht sofort, daß dieses allgemeinere Problem das früher behandelte als Spezialfall umfaßt:

Setzen wir nämlich

$$f(v) = 1 \text{ für alle } v \text{ zwischen } a \text{ und } b,$$

$$f(v) = 0 \text{ für alle anderen } v,$$

so sind wir damit auf unser altes Problem zurückgeführt. —

Es fällt nach (16) aus dem Kegel  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  unter dem Einfallswinkel  $\vartheta$  in der Zeit  $dt$  von unten auf die Fläche  $F$  der Platte eine Energie der Schwingungszahl  $\nu$ :

$$(71) \quad I_1 = 2\Re, d\nu \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) d\vartheta d\varphi F dt.$$

Nun wissen wir: Strahlen der Schwingungszahl  $\nu$  erscheinen nach (5) an der bewegten Platte als von der Schwingungszahl

$$(72) \quad \nu \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right).$$

Es wird daher nach (69) von der einfallenden Energie  $I_1$  durch die Platte hindurchgelassen eine Energie

$$(73) \quad = f \left[ \nu \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \right] \cdot I_1.$$

Ist  $f(v)$  mit seinen Ableitungen stetig — und an dieser Annahme wollen wir zunächst festhalten —, so kann man

$$f \left[ \nu \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \right]$$

in bekannter Weise nach der Taylorschen Reihe entwickeln, wie folgt:

$$(74) \quad \left\{ f \left[ \nu \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \right] = f(v) + \nu \frac{v}{c} \cos \vartheta \cdot f'(v) \right. \\ \left. + \frac{v^2}{2} \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \vartheta \cdot f''(v), \right.$$

indem wir aus den früher erörterten Gründen beim dritten Gliede abbrechen. Es wird also die gesamte durchgelassene Energie

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} &= 4 \pi F d t \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{v}{c} \right)^2 \mathfrak{Z}_1 + \frac{1}{3} \frac{v}{c} \mathfrak{Z}_2 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \mathfrak{Z}_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \frac{v^2}{c^2} \mathfrak{Z}_3 \right\} = I_{12}. \end{aligned} \right.$$

Dabei sind

$$(75a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= \int_0^\infty f(v) \mathfrak{R}_v d v, \\ \mathfrak{Z}_2 &= \int_0^\infty v \cdot f'(v) \mathfrak{R}_v d v, \\ \mathfrak{Z}_3 &= \int_0^\infty v^2 f''(v) \mathfrak{R}_v d v. \end{aligned} \right.$$

$I_{12}$  ist die von unten nach oben durch die Platte tretende Energie.  $I_{21}$ , die von oben nach unten gehende, ergibt sich daraus, wenn man  $v/c$  mit  $(-v/c)$  vertauscht.

Also

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{21} &= 4 \pi F d t \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^2 \mathfrak{Z}_1 - \frac{1}{3} \frac{v}{c} \mathfrak{Z}_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \mathfrak{Z}_3 + \frac{1}{8} \frac{v^2}{c^2} \mathfrak{Z}_3 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Aus (75) und (76) folgt:

$$(77) \quad I_{12} - I_{21} = 8 \pi F d t \frac{v}{c} \left\{ \mathfrak{Z}_1 + \frac{1}{3} \mathfrak{Z}_2 \right\}.$$

$I_{12} - I_{21}$  ist, wie man sieht, von erster Ordnung in  $v/c$ . Daher kehrt es, ohne seinen absoluten Wert zu ändern, sein Zeichen um bei einer Umkehrung der Bewegungsrichtung.

Da  $f(v)$ ,  $f'(v)$ ,  $f''(v)$  stetig sind, so können wir durch partielle Integration  $\mathfrak{Z}_2$  umformen, wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_2 &= \int_0^\infty v f'(v) \mathfrak{R}_v d v = \left[ v \mathfrak{R}_v f(v) \right]_0^\infty - \int_0^\infty f(v) \frac{\partial}{\partial v} (v \mathfrak{R}_v) d v \\ &= - \int_0^\infty f(v) \left\{ \mathfrak{R}_v + v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right\} d v. \end{aligned}$$

Daher können wir (77) auf die Form bringen:

$$(78) \quad I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F dt \frac{v}{c} \int_0^{\infty} f(v) \left\{ 2\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right\} dv.$$

Da nun, wie wir oben bewiesen haben, unter Zugrundelegung des Planckschen Strahlungsgesetzes

$$2\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v}$$

eine positive Größe ist, so folgt auch hier

$$(79) \quad I_{12} > I_{21},$$

d. h. es geht während der Bewegung mehr Energie von unten nach oben durch die Platte, als in umgekehrter Richtung. Es ist jedoch zu beachten, daß dies Ergebnis hier vorläufig unter der Annahme bewiesen ist, daß  $f(v)$ ,  $f'(v)$ ,  $f''(v)$  stetig sind.

Weiter unten werden wir uns von der Beschränkung freimachen.

#### § 8.

Zur Berechnung der Entropieänderung  $\delta S$  werden wir hier, der Kürze halber, den vorhin an zweiter Stelle angegebenen Weg einschlagen, der sich auf die Formel (52)

$$\delta S = \frac{A}{T} = \frac{A_1 - A_2}{T}$$

stützt; dabei ist  $A_1$  die von außen an der Strahlung unter der Platte geleistete Arbeit,  $A_2$  die von der Strahlung über der Platte gewonnene Arbeit.

Nun fällt nach (71) aus dem Kegel  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  unter dem Einfallswinkel  $\vartheta$  in der Zeit  $dt$  auf die Fläche  $F$  der Platte von unten eine Energie der Farbe  $\nu$ :

$$I_1 = 2\mathfrak{R}_\nu d\nu \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) d\vartheta d\varphi F dt.$$

Von dieser Energie geht ein Teil durch die Platte ungehindert hindurch, und zwar nach (73)

$$I_1 \cdot f \left[ \nu \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \right].$$

An dieser durchgehenden Strahlung wird offenbar keine Arbeit geleistet. Zur Reflexion gelangt von der einfallenden Energie  $I_1$  nur der Teil

$$I_1 \left\{ 1 - f \left[ \nu \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \right] \right\},$$

oder wenn wir allgemein

$$(80) \quad 1 - f(v) = g(v)$$

setzen, und für  $I_1$  seinen Wert einsetzen:

$$2 R, d v \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) d \vartheta d \varphi F d t g \left[ v \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \right].$$

Die reflektierte Energie ist daher nach (19a)

$$I_2 = 2 R, d v \sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{v}{c} \right) d \vartheta d \varphi F d t g \left[ v \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \right] \\ \cdot \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + 2 \frac{v^2}{c^2} \right). \\ I_2 - I_1 g \left[ v \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \right]$$

ist offenbar die Arbeit, die an der monochromatischen Strahlung vom Einfallswinkel  $\vartheta$  geleistet wird; ihr Wert ergibt sich zu:

$$4 R, d v \sin \vartheta d \vartheta d \varphi F d t \left\{ g(v) \frac{v}{c} \cos^3 \vartheta + 2 g(v) \frac{v^2}{c^2} \cos \vartheta \right. \\ \left. + v g'(v) \frac{v^2}{c^2} \cos^3 \vartheta \right\}.$$

Integriert man dieses Arbeitsdifferential über  $v$  von 0 bis  $\infty$ , über  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$ , über  $\vartheta$  von 0 bis

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{v}{c},$$

so erhält man:

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 = 8 \pi F d t \left\{ \frac{1}{3} \frac{v}{c} \int_0^\infty g(v) R, d v + \frac{v^2}{c^2} \int_0^\infty g(v) R, d v \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} \int_0^\infty v g'(v) R, d v \right\}. \end{aligned} \right.$$

Analog erhält man:

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} A_2 = 8 \pi F d t \left\{ \frac{1}{3} \frac{v}{c} \int_0^\infty g(v) R, d v - \frac{v^2}{c^2} \int_0^\infty g(v) R, d v \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} \int_0^\infty v g'(v) R, d v \right\}. \end{aligned} \right.$$

Daher

$$A = A_1 - A_2 = 8\pi Fdt \frac{v^2}{c^3} \left\{ 2 \int_0^\infty g(v) \mathfrak{R}_v dv + \frac{1}{2} \int_0^\infty v g'(v) \mathfrak{R}_v dv \right\}.$$

Nun ist nach (80)

$$g(v) = 1 - f(v),$$

$$g'(v) = -f'(v).$$

Daher ergibt sich unter Benutzung der in (75a) eingeführten Abkürzungen:

$$(83) \quad A = 8\pi Fdt \frac{v^2}{c^3} \left\{ K - 2\mathfrak{S}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{S}_2 \right\},$$

und

$$(84) \quad \delta S = \frac{A}{T} = \frac{8\pi Fdt}{T} \frac{v^2}{c^3} \left\{ K - 2\mathfrak{S}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{S}_2 \right\}.$$

$\delta S$  und  $A$  sind auch hier, wie man sieht, von der Ordnung  $v^2$  und nehmen daher für unendlich kleine Geschwindigkeiten der Platte den Wert 0 an.

Da nach dem obigen  $\mathfrak{S}_2$  in der Form

$$\mathfrak{S}_2 = - \int_0^\infty f(v) \left\{ \mathfrak{R}_v + v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right\} dv$$

geschrieben werden kann, so können wir, unter Beachtung von (80) und Benutzung der leicht zu verifizierenden Relation

$$K = \int_0^\infty 2\mathfrak{R}_v dv = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right\} dv$$

den Formeln (83) und (84) folgende Gestalt geben:

$$(85) \quad A = 4\pi Fdt \frac{v^2}{c^3} \int_0^\infty g(v) \left\{ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right\} dv,$$

und

$$(86) \quad \delta S = \frac{4\pi Fdt}{T} \frac{v^2}{c^3} \int_0^\infty g(v) \left\{ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right\} dv.$$

Da nun, wie wir in (47) sahen,  $3\mathfrak{R}_v - v(\partial \mathfrak{R}_v / \partial v)$  stets positiv ist, so folgt, da auch  $g(v) > 0$ ,

$$A > 0 \quad \text{und} \quad \delta S > 0,$$

d. h. im allgemeinen ist der Prozeß irreversibel und erfordert einen äußeren Arbeitsaufwand. Für unendlich kleine Geschwindigkeiten wird auch hier, im Grenzfall, der Prozeß reversibel, und die zu leistende Arbeit wird unendlich klein.

## § 9.

Die vorangegangenen Entwicklungen gelten nur für den Fall, daß  $f(v)$  und seine Ableitungen im ganzen Intervall von 0 bis  $\infty$  eindeutig, endlich und stetig sind. Wir könnten daher ohne weiteres nie zu unserem früheren Problem (das doch einen Spezialfall des hier behandelten allgemeineren darstellen sollte) zurückgelangen, da ja dort  $f(v)$  an den Stellen  $a$  und  $b$  unstetig ist.

Wir müssen daher unsere Betrachtungen noch erweitern, und setzen von nun an voraus, daß von den hier in Frage kommenden Größen  $f(v)$ ,  $f'(v)$ ,  $f''(v)$  eine oder mehrere an den Stellen  $a$  und  $b$  Unstetigkeiten zeigen. Der noch allgemeinere Fall von mehr als zwei Unstetigkeitsstellen ergibt sich hieraus durch Superposition.

Wenn also in dem Gange einer oder mehrerer der Funktionen  $f(v)$ ,  $f'(v)$ ,  $f''(v)$  Unstetigkeiten bei  $a$  und  $b$  auftreten, so ist die in (74) benutzte Taylorsche Reihe in der Umgebung von  $a$  und  $b$  nicht mehr anwendbar und muß bei der Berechnung von  $I_{12}$  durch eine andere Entwicklung ersetzt werden.

Liegt nämlich  $v$  zwischen

$$a\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{und} \quad a\left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

dann kann, da  $\vartheta$  zwischen 0 und  $\pi/2 + \arcsin v/c$  variiert,

$$v\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)$$

für gewisse  $\vartheta$  unterhalb, für andere oberhalb von  $a$  liegen, und man muß daher die Betrachtung teilen.

Ist

$$v\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) \geq a \quad \text{oder} \quad \vartheta \geq \arccos \frac{c}{v} \left(\frac{a}{v} - 1\right),$$

dann entwickeln wir zweckmäßig, wie folgt:

$$f\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)\right] = f(a) + \frac{\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) - a\right]}{1!} f'(a) \\ + \frac{\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) - a\right]^2}{2!} f''(a),$$

wo

$$\begin{cases} f(a) = \lim_{\xi=0} f(a - \xi), \\ f'(a) = \lim_{\xi=0} f'(a - \xi), \\ f''(a) = \lim_{\xi=0} f''(a - \xi). \end{cases}$$

Ist aber

$$\vartheta < \arccos \frac{c}{v} \left(\frac{a}{\nu} - 1\right),$$

dann wird man entwickeln:

$$f\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)\right] \\ = \lim_{\xi=0} f(a + \xi) + \frac{\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) - a\right]}{1!} \lim_{\xi=0} f'(a + \xi) \\ + \frac{\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) - a\right]^2}{2!} \lim_{\xi=0} f''(a + \xi).$$

Genau dieselben Betrachtungen gelten für die Unstetigkeitsstelle  $b$ .

Macht man bei der Berechnung von  $I_{21}$  analoge Entwicklungen und bildet

$$I_{12} - I_{21},$$

so erhält man schließlich das einfache Resultat:

$$(87) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{12} - I_{21} = & \frac{8\pi}{3} F d t \frac{v}{c} \lim_{\xi=0} \left\{ \int_0^{a-\xi} f(v) \left[ 2\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv \right. \\ & + \frac{\int_{a+\xi}^{b-\xi} f(v) \left[ 2\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv}{\int_{a+\xi}^{b+\xi} f(v) \left[ 2\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv} \\ & \left. + \int_{b+\xi}^{\infty} f(v) \left[ 2\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv \right\}. \end{aligned} \right.$$

Sind  $a$  und  $b$  keine Unstetigkeitsstellen, so geht dies Resultat ohne weiteres in das in (78) erhaltene über.

Der Einfluß der Unstetigkeitsstellen  $a$  und  $b$  macht sich, wie man sieht, nur in der Weise geltend, daß bei der Integration nach  $\nu$  diese Unstetigkeitsstellen durch kleine Intervalle,  $a - \xi$  bis  $a + \xi$  und  $b - \xi$  bis  $b + \xi$ , aus dem Integrationsgebiet auszuschließen sind; man führt dann die Integration in gewöhnlicher Weise aus und geht zur Grenze  $\xi = 0$  über.

Bei mehr als zwei Unstetigkeitsstellen gilt dieselbe Vorschrift.

Nur für sehr kleine  $\nu$  wird, wie wir oben sahen, nach dem Rayleighschen Strahlungsgesetz:

$$2\mathfrak{R}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu} = 0 \text{ und daher } I_{12} = I_{21},$$

d. h. im Grenzfall sehr langer Wellen (oder sehr hoher Temperatur) geht während der Bewegung gleich viel Energie von unten nach oben durch die Platte, wie in umgekehrter Richtung.

Sonst ist stets

$$2\mathfrak{R}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu} > 0 \text{ und daher } I_{12} > I_{21},$$

d. h. im allgemeinen geht auch hier mehr Energie von der Seite der komprimierten Strahlung nach oben, als umgekehrt.

Setzen wir jetzt speziell:

$$f(\nu) = 0 \text{ für alle } \nu \text{ zwischen}$$

$$\nu = 0 \text{ und } \nu = a, \nu = b \text{ und } \nu = \infty;$$

$$f(\nu) = 1 \text{ für alle } \nu \text{ zwischen}$$

$$\nu = a \text{ und } \nu = b,$$

so sind wir damit zu unserem früheren Problem zurückgekehrt.

Es fallen dann in unserem obigen Ausdruck (87) das erste und dritte Integral fort, und es bleibt:

$$\begin{aligned} I_{12} - I_{21} &= \frac{8\pi}{3} F d t \frac{\nu}{c} \lim_{\xi=0} \int_{a+\xi}^{b-\xi} \left[ 2\mathfrak{R}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu \\ &= 8\pi F d t \frac{\nu}{c} \left\{ \int_a^b \mathfrak{R}_\nu d\nu + \frac{1}{3} a \mathfrak{R}_a - \frac{1}{3} b \mathfrak{R}_b \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist in der Tat der in (24) erhaltene Wert.



Ist  $f(v)$  nur zwischen  $a$  und  $b$  von 0 verschieden, dann folgt aus (87)

$$I_{13} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F d t \frac{v}{c} \int_a^b f(v) \left[ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv.$$

Auch bei der Berechnung der Entropieänderung  $\delta S$  und der Arbeit  $A = T \cdot \delta S$  war oben Stetigkeit von  $f(v)$ ,  $f'(v)$ ,  $f''(v)$  vorausgesetzt worden.

Führt man auch diese Berechnung unter der Annahme durch, daß bei  $a$  und  $b$  Unstetigkeiten auftreten können, und geht dabei ganz den eben beschrittenen Weg, dann findet man:

$$(88) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta S &= \frac{4\pi F d t v^2}{T c^2} \lim_{\xi=0} \left\{ \int_0^{a-\xi} g(v) \left[ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv \right. \\ &\quad \left. + \int_{a+\xi}^{b-\xi} g(v) \left[ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv \right. \\ &\quad \left. + \int_{b+\xi}^{\infty} g(v) \left[ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist nach (80)

$$g(v) = 1 - f(v).$$

$g(v)$  ist stets  $> 0$ , ebenso ist  $3\mathfrak{R}_v - v(\partial \mathfrak{R}_v / \partial v)$ , wie wir oben in (47) bewiesen haben, stets positiv. Daraus folgt, daß allgemein:

$$(89) \quad \delta S > 0.$$

Wie auch die Platte beschaffen sein mag, der Prozeß ist stets mit einer endlichen Entropiezunahme verbunden, die von der Ordnung  $v^2/c^2$  ist.

Der Prozeß ist im allgemeinen irreversibel und wird nur im Grenzfall unendlich kleiner Geschwindigkeit umkehrbar. Über den Einfluß der Unstetigkeitsstellen auf den Wert von  $\delta S$  gilt das im Anschluß an (87) Ausgeführte.

Da

$$(90) \quad A = T \cdot \delta S \text{ nach (89) } > 0,$$

so folgt, daß man bei der Bewegung stets von außen Arbeit an der Strahlung leisten muß.

Setzen wir speziell

$$f(v) = 1 \text{ für die } v \text{ zwischen } v = a \text{ und } v = b,$$

$$f(v) = 0 \text{ für alle anderen } v,$$

so ist

$$g(v) = 0 \text{ für die } v \text{ zwischen } a \text{ und } b,$$

$$g(v) = 1 \text{ für alle anderen } v.$$

Es fällt dann in (88) das mittlere Integral fort, und man erhält:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \lim_{\xi=0} \left\{ \int_0^{a-\xi} \left[ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv + \int_{b+\xi}^{\infty} \left[ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv \right\}, \\ &= \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \left\{ 4 \int_0^a \mathfrak{R}_v dv + 4 \int_b^{\infty} \mathfrak{R}_v dv + b \mathfrak{R}_b - a \mathfrak{R}_a \right\}, \end{aligned}$$

dasselbe Resultat, das wir schon früher in (45) fanden. Ist  $f(v)$  und damit auch  $g(v)$  stetig im Bereich  $v=0$  bis  $v=\infty$ , dann geht  $\delta S$  über in den in (86) aufgestellten Wert:

$$\delta S = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \int_0^{\infty} g(v) \left[ 3\mathfrak{R}_v - v \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial v} \right] dv.$$

Ist  $g(v) = 1$  für alle  $v$  von 0 bis  $\infty$ , dann ist unsere Platte ein vollkommener Spiegel, und es ergibt sich:

$$\delta S = \frac{8\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} K$$

in Übereinstimmung mit (50).

#### § 10.

Daß auch hier stets ein *Aufwand* von äußerer Arbeitsleistung nötig ist, um mit einem vollkommenen Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung zurückzulegen, läßt sich einfach zeigen, wenn man auch hier das Bestehen der Ungleichung

$$p_2 \left[ = \frac{1}{3} u_2' \left( 1 + 3 \frac{v}{c} \right) \right] > p_1 \left[ = \frac{1}{3} u_1' \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \right) \right],$$

oder, wie sich nach einiger Rechnung ergibt:

$$6u \frac{v}{c} > \delta u_1 - \delta u_2$$

nachweist.

Nun ist die an der Strahlung im unteren Raum bei der Bewegung der Platte von außen geleistete Arbeit

$$A_1 = \delta U_1 = (V - Fv dt)(u + \delta u_1) - Vu.$$

Also

$$\delta u_1 = \frac{A_1 + u Fv dt}{V - Fv dt}.$$

Analog:

$$\delta u_2 = - \frac{A_2 + Fv dt}{V + Fv dt},$$

wenn  $A_2$  die Arbeit ist, die die Strahlung im oberen Raum an der bewegten Platte leistet.

Setzt man diese beiden Werte in die obige Ungleichung ein, so folgt nach einiger Rechnung:

$$6u \frac{v}{c} > \frac{A_1 + A_2}{V} + \frac{Fv dt}{V} \frac{A_1 - A_2}{V} + 2u \frac{Fv dt}{V},$$

oder da

$$A_1 - A_2 = A$$

nach (88) und (90) von der Ordnung  $v^2/c^2$  ist,

$$6u \frac{v}{c} > \frac{A_1 + A_2}{V} + 2u \frac{Fv dt}{V}.$$

Den größten Wert haben  $A_1$  und  $A_2$  und daher auch  $A_1 + A_2$  für einen vollkommenen Spiegel, d. h. wenn  $g(v) = 1$  für alle  $v$  zwischen 0 und  $\infty$ .

Aus (81) und (82) folgt dann:

$$A_1 + A_2 = \frac{8\pi}{3} \frac{Fdt}{V} \frac{v}{c} K = \frac{2}{3} \frac{Fv dt}{V} u.$$

Der Maximalwert der rechten Seite unserer Ungleichung ist daher

$$\frac{8}{3} u \frac{Fv dt}{V}.$$

Da nun nach (1)

$$\frac{Fv dt}{V} < 2,$$

so folgt

$$\frac{Fv dt}{V} < 2 \frac{v}{c}.$$

Daher

$$\frac{8}{3} \frac{Fv dt}{V} u < \frac{16}{3} \frac{v}{c} u < 6u \frac{v}{c}.$$

Unsere Ungleichung ist also a fortiori erfüllt, und es ist in der Tat, trotzdem  $u'_1 > u'_2$ , d. h. trotzdem die Dichte der

Energie im unteren Raume vor Beginn der Rückbewegung größer ist als im oberen Raum, doch der Druck der oberen Strahlung auf den *bewegten* Spiegel ( $p'_2$ ) größer, als der Druck der Strahlung unter dem Spiegel ( $p'_1$ ). Daher ist eine äußere *Arbeitsleistung* nötig, um die Rückbewegung zu vollführen.

Ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz liegt auch hier demnach *nicht* vor.

#### § 11. Zusammenfassung.

Wir stellen hier am Schlusse noch einmal unsere Ergebnisse zusammen und heben die wesentlichen Punkte hervor, die von den Resultaten Wiens abweichen.

I. Eine Platte, deren Durchlässigkeitskoeffizient

$$\left( \text{d. h. der Bruch } \frac{\text{Durchgelassene Energie}}{\text{Einfallende Energie}} \right)$$

eine beliebige, stetige oder unstetige, von der Richtung der einfallenden Strahlen und ihrer Polarisation unabhängige, Funktion der Schwingungszahl allein ist, ruft, wenn sie in einem Gefäß mit schwarzer Strahlung, nach Art eines Stempels, von der Mitte aus während einer sehr kurzen Zeit mit einer endlichen Geschwindigkeit bewegt wird, eine *Entropiezunahme* des ganzen Systems hervor. Die Platte umfaßt als wichtigste Spezialfälle: 1. eine Platte der Eigenschaft, alle zwischen zwei Grenzen liegenden Farben ungehindert hindurchzulassen, alle übrigen zu reflektieren, wie ein vollkommener Spiegel; 2. den vollkommenen Spiegel selbst.

II. Ist die Geschwindigkeit der Platte,  $v$ , so klein, daß man in den definitiven Resultaten die Entwicklung bei Gliedern der Ordnung  $v^2$  abbricht, so ist die Entropiezunahme des Systems von der Ordnung  $v^2$ . Der Prozeß ist also im allgemeinen *irreversibel*, und nach Beendigung der Bewegung ist die Energieverteilung nicht mehr die der schwarzen Strahlung. Im Grenzfall, für unendlich kleine Geschwindigkeiten, wird der Prozeß *reversibel*, und die Abweichungen von der Energieverteilung der schwarzen Strahlung werden unmerklich klein.

III. Während der Bewegung der Platte geht stets *mehr* (im Grenzfall, für lange Wellen oder sehr hohe Strahlungs-

temperatur, ebensoviel) Energie von der Seite der komprimierten Strahlung durch die Platte in den anderen Raum, als umgekehrt. Die Differenz der in entgegengesetzter Richtung durch die Platte tretenden Energien ist von erster Ordnung in  $v$ .

IV. Die während der Bewegung von außen zu leistende Arbeit ist stets positiv und von der Ordnung  $v^2$ . Den Maximalwert hat diese Arbeit, wenn unsere Platte speziell ein vollkommener Spiegel ist. Wird die Bewegung mit unendlich kleiner Geschwindigkeit ausgeführt, so ist keine merkliche Arbeitsleistung dazu nötig.

V. Trotzdem während der nach unten gerichteten Bewegung unserer Platte mehr Energie von unten nach oben durch die Platte geht, als umgekehrt (vgl. III.), ist dennoch nach Beendigung der Bewegung die Energiedichte, infolge der Volumverkleinerung und der Energiezunahme bei der Reflexion, im unteren Raum größer als im oberen.

VI. Ersetzt man daher die Platte durch einen vollkommenen Spiegel, so ist dieser, solange er ruht, einem Überdruck von unten ausgesetzt.

VII. Legt man dagegen mit dem Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$  zurück, so drückt die obere Strahlung auf den ihr entgegenkommenden, bewegten Spiegel stärker, als die Strahlung im unteren Raum auf den von ihr gleichsam zurückweichenden Spiegel.

VIII. Es folgt, daß man beim Rückwege nicht etwa Arbeit gewinnt, sondern im Gegenteil, Arbeit leistet.

IX. Beim Hin- und Rückweg ist also im ganzen eine positive Arbeit geleistet worden.

Ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz liegt demnach nicht vor.

Es ist daher auch unmöglich, unseren Prozeß zur Ableitung eines Energieverteilungsgesetzes zu benutzen.

Nach alledem scheint mir gegen die theoretische Möglichkeit der geschilderten Platte, und speziell gegen die Möglichkeit einer Platte, die nur Strahlen, deren Farbe zwischen zwei bestimmten Wellenlängen liegt, vollkommen hindurchläßt, alle übrigen vollkommen reflektiert (unabhängig von der Richtung

der Strahlen), kein Einwand vorzuliegen. Die Annahme einer solchen Platte führt, wie mir scheint, nicht zu einem Widerspruch mit der Theorie.

Es versteht sich dagegen von selbst, daß damit über die *praktische Verwirklichung* der Platte nichts ausgesagt ist. Denn es ist nicht anzunehmen, daß eine Platte von der geschilderten Art auch nur in Annäherung praktisch realisierbar ist, da ja eine Unabhängigkeit der Durchlässigkeit von der Richtung und dem Polarisationszustand der Strahlung nicht wohl denkbar ist.

Dies ist wohl auch der Grund, der Kirchhoff zu den Worten veranlaßte, „die Annahme einer solchen Platte sei durch nichts gerechtfertigt“; er vermied es daher, sich einer derartigen Lamelle zu bedienen, als er den Beweis seines Satzes von Emissions- und Absorptionsvermögen von der Gesamtstrahlung auf die Strahlungen bestimmter Schwingungszahl übertrug.

Dieser zweite Teil des Beweises ist *mit Hilfe unserer Platte* mit einem Schlage zu gewinnen. Nur muß man sich dann darüber klar sein, daß man damit die Anwendung von Beweis Hilfsmitteln zuläßt, die, *ohne realisierbar zu sein*, allein vom Standpunkt der Theorie einwandfrei sind. Und dies könnte immerhin prinzipielle Bedenken erregen.

(Eingegangen 18. Januar 1908.)

## 6. Über die innere Verdampfungswärme; von C. Dieterici.

Die Gleichung, welche die mechanische Wärmetheorie für die innere Verdampfungswärme  $q$  einer Flüssigkeit bei der absoluten Temperatur  $\vartheta$  und unter dem Sättigungsdruck  $p$ , aufstellt

$$(1) \quad q = \left( \vartheta \cdot \frac{dp_s}{d\vartheta} - p_s \right) (v_2 - v_1),$$

worin  $v_2$  und  $v_1$  die spezifischen Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit bedeutet und beide Seiten der Gleichung in gleichem kalorischen oder mechanischen Maße genommen sind, entbehrt wie jedes durch rein energetische Betrachtungen gewonnenes Resultat der mechanischen Deutung.

Eine solche suchen die Zustandsgleichungen zu geben. Die Gleichung von van der Waals

$$(2) \quad p + \pi = \frac{R\vartheta}{v - b}$$

liefert unmittelbar, sofern man die van der Waalssche Hypothese über den von der Temperatur unabhängigen Kohäsionsdruck:

$$\pi = \frac{a}{v^2}$$

hinzunimmt, durch

$$(3) \quad q = \int_{v_1}^{v_2} \left( \vartheta \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_v - p \right) dv = \int_{v_1}^{v_2} \pi \cdot dv = a \left\{ \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right\}$$

die Anschauung, daß die innere Verdampfungswärme die Arbeit darstellt, welche gegen den in der Flüssigkeit bestehenden Kohäsionsdruck geleistet werden muß, um die Molekeln der Substanz in den Dampfzustand überzuführen, in dem die Kohäsion wesentlich kleiner ist, als in der Flüssigkeit.

Es ist bekannt, daß der letztere Ausdruck (3) sich in keiner Weise mit der wohlbegründeten Gleichung (1) der



mechanischen Wärmetheorie vereinigen läßt. Die an allen beobachteten Stoffen ausgeführten Berechnungen haben durchaus nicht die van der Waalssche Kohäsionskonstante  $a$  als konstant ergeben, und alle Bemühungen,  $a$  als Temperaturfunktion zu betrachten, haben nicht zum entscheidenden Erfolg geführt.

In anderer Weise hat Clausius die van der Waalsschen Grundanschauungen ausgesprochen. Er stellte sich vor auf dem Boden kinetischer Anschauungen, daß bei der Koexistenz einer Substanz in zwei Phasen in der Flüssigkeitsoberfläche ein dauernder Austausch der molekularen Bewegungen stattfindet, derart, daß zwar von seiten der Flüssigkeit mehr Molekeln pro Flächen- und Zeiteinheit auf die Trennungsfläche treffen, als von seiten des weniger dichten Dampfes, daß aber nur diejenigen Molekeln aus der Flüssigkeit in den Dampf übertreten können, die genügende lebendige Kraft mit sich führen, um die Kohäsionsarbeit zu überwinden.

Diese Grundanschauungen sind von Clausius nur in Worten ausgesprochen; ihre mathematische Formulierung ist später in mehreren Arbeiten von G. Jäger, W. Voigt und von mir selbst gegeben.<sup>1)</sup>

Ein Resultat ergab sich als ein durch die Beobachtungen kontrollierbares aus den angeführten Arbeiten; daß, wenn man zunächst von der räumlichen Ausdehnung der Moleküle absieht, also die schon in Gleichung (2) auftretende Größe  $b$  von van der Waals vernachlässigt, die Beziehung

$$\frac{v_2}{v_1} = e^{+\frac{1}{2} m s^2} + \frac{1}{18} \frac{m s^2}{m c^2}$$

bestehen müsse, worin  $\frac{1}{2} m s^2$  die lebendige Kraft der Schwerpunktsbewegung der Molekeln darstellt, die zur Überwindung des Kohäsionsdruckes notwendig ist, und  $\frac{1}{18} m c^2 = R \vartheta$  die mittlere lebendige Kraft der Molekularbewegung bei der Temperatur  $\vartheta$  bedeutet, die nach den angeführten Betrachtungen in Flüssigkeit und Dampf die gleiche sein mußte.

1) Literaturnachweis findet sich in meiner früheren Arbeit Wied. Ann. 66. p. 826—858. 1898.



Die Durchbruchsarbeit  $\frac{1}{2} m s^2$  mußte auf die Gewichtseinheit, berechnet nach Hrn. Voigt, die innere Verdampfungswärme  $\varrho$  sein, und folglich ergab sich

$$\frac{v_2}{v_1} = e^{\frac{\varrho}{R \theta}}$$

oder

$$(4) \quad \varrho = R \theta \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Eine Prüfung dieser Gleichung unter Benutzung des damals vorliegenden Beobachtungsmaterials zeigte, daß in dieser einfachen Form die Gleichung nicht bestehen könne, sondern daß von vornherein die Gleichung

$$(5) \quad \varrho = c R \theta \ln \frac{v_2}{v_1}$$

geschrieben werden mußte, worin  $c$  ein Faktor ist, der notwendig größer als Eins sein mußte. Eine theoretische Rechtfertigung für die Einführung dieses Faktors gab auch Hr. Voigt sogleich durch die Annahme, daß sich in der Grenzschicht zwischen Flüssigkeit und Dampf nicht nur die Energie der fortschreitenden Bewegung austausche, sondern die Gesamtenergie, und daß die letztere ebenso wie bei Gasen durch Multiplikation mit einem notwendig positiven Faktor aus der Energie der fortschreitenden Bewegung gewonnen werden kann.

Damals ausgeführte Berechnungen an dem Regnaultschen Beobachtungsmaterial ergaben aber, daß dieser Faktor  $c$  von Stoff zu Stoff in ganz unübersichtlicher Weise sich änderte und auch bei einem Stoff nicht konstant war, so daß damals von einer weiteren Verfolgung der Gleichung (5) abgesehen werden mußte.

Zudem stand ihr das Bedenken entgegen, daß sie in keiner Weise Rücksicht nimmt auf die von van der Waals durch unanfechtbar erscheinende Überlegungen eingeführte räumliche Ausdehnung der Moleküle, und es war nur natürlich, die Gleichung (5) in die Form

$$\varrho = c \cdot R \theta \ln \frac{v_2 - b_2}{v_1 - b_1}$$

überzuführen und zu suchen, ob man durch Berücksichtigung

der Abhängigkeit der Größe  $b$  vom Volumen bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen erzielen könne.

Alle Versuche in dieser Richtung sind fehlgeschlagen.

2. Bei neueren Berechnungen, die ein anderes Ziel verfolgten, fiel es mir auf, daß bei dem von Hrn. S. Young so vortrefflich beobachteten Isopentan<sup>1)</sup>  $C_5H_{12}$ , die nach der thermodynamischen Gleichung (1) berechnete innere Verdampfungswärme  $q$  tatsächlich dem Ausdruck  $R \vartheta \ln(v_2/v_1)$  proportional sei, oder daß die Gleichung (5)

$$q = \left( \vartheta \cdot \frac{dp_s}{d\vartheta} - p_s \right) (v_2 - v_1) = c R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}$$

zu Recht bestehe.

Den Beweis hierfür bringt die folgende Tabelle 1, in der neben der absoluten Temperatur die Sättigungsdaten nach den Beobachtungen von S. Young angegeben sind; damit ist unter  $q$  die innere Verdampfungswärme nach der thermodynamischen Gleichung (1) in Kalorien berechnet und ebenso der Ausdruck  $R \vartheta \ln(v_2/v_1)$ . Die letzte Spalte gibt den Quotienten

$$c = \frac{q}{R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}}$$

An Konstanten sind verwendet:

$$1 \text{ mm Hg} = 1,3596 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2},$$

1 Kalorie = 427,4 g-m und die Gaskonstante für 1 g Isopentan

$$R = \frac{84500}{72.1} \frac{\text{g-cm}}{^\circ\text{C.}} = 0,02742 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{C.}}$$

Die mit  $c$  überschriebene Spalte der Tabelle zeigt, daß der Quotient  $q/R \vartheta \ln(v_2/v_1)$  mit überraschender Genauigkeit konstant ist; sieht man von den beiden letzten der kritischen Temperaturen sehr nahe liegenden Werten ab, so liegen alle berechneten Werte zwischen 1,695 und 1,708, zeigen also Schwankungen in dem engen Bereich von nur 0,7 Proz. Systematische Abweichungen sind in keiner Weise erkennbar. Fragt man nach der Genauigkeit, die man bei der Berechnung überhaupt erwarten kann, so ist ersichtlich, daß sie im wesent-

<sup>1)</sup> S. Young, Zeitschr. f. physik. Chem. 29. p. 193—241. 1899.

Tabelle 1.

Isopentan:  $t_n = 187,8^\circ \text{C.}$ ,  $p_n = 25010 \text{ mm Hg.}$ ,  $v_n = 4,266 \text{ cm}^3$ .

$\vartheta$	$p$ mm Hg	$v_1$ $\text{cm}^3$	$v_2$ $\text{cm}^3$	$\varrho$ cal	$R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}$ cal	$c$
283	390,5	1,5885	607,5	78,64	46,15	1,704
293	572,6	1,6141	424	75,97	44,76	1,697
303	815,3	1,6413	303	73,52	43,35	1,696
313	1131	1,6700	223,2	71,22	42,01	1,695
323	1533	1,7005	167,6	68,95	40,66	1,696
333	2036	1,7329	127,9	66,67	39,27	1,698
343	2653	1,7679	93,9	64,18	37,86	1,695
353	3401	1,8050	77,9	62,01	36,44	1,702
363	4296	1,8475	61,85	59,49	34,94	1,703
373	5355	1,8940	49,45	56,72	33,39	1,699
383	6596	1,9455	39,80	53,78	31,71	1,696
393	8040	2,0037	32,20	50,98	29,93	1,703
403	9707	2,0720	26,10	47,65	27,99	1,702
413	11620	2,1530	21,15	44,15	25,86	1,707
423	13804	2,2500	17,14	40,18	23,56	1,705
433	16285	2,3780	13,72	35,52	20,80	1,708
443	19094	2,5550	10,71	29,53	17,40	1,697
453	22262	2,8580	7,95	21,23	12,69	1,673
458	23992	3,1830	6,355	14,17	8,68	1,632
460,8	25010	4,266	4,266	0	0	—

lichen bestimmt ist durch die Zuverlässigkeit der Werte, die für  $\varrho$  nach der thermodynamischen Gleichung berechnet sind. Die in dieser vorkommenden Werte des Dampfdruckes und der Dampfdruckzunahme mit der Temperatur können wohl mit Rücksicht auf die von Hrn. Young verwendete Briotsche Interpolationsformel als zuverlässig angenommen werden; die wesentliche Ursache einer Ungenauigkeit in  $\varrho$  steckt in dem multiplikativen Faktor  $(v_2 - v_1)$  und dieser wieder ist bei niedrigen Temperaturen fast allein durch  $v_2$  bestimmt, erst bei Temperaturen, die der kritischen nahe sind, macht sich auch die Ungenauigkeit im Werte von  $v_1$  bemerkbar.

Im Nenner des Quotienten  $c$  tritt das Verhältnis  $v_2/v_1$  dieser Größen nur in dem Logarithmus auf; ihre Unsicher-

heit ist also hier nicht von so großem Einfluß, wie im Zähler, wo die Differenz eingeht. Aus der Tatsache, daß die Berechnung der Tabelle 1 den Quotienten  $c$  mit einer so großen Schärfe konstant ergibt, muß man also schließen, daß die von S. Young angegebenen Werte der Sättigungsvolumina von Dampf und Flüssigkeit, dank der von ihm ersonnenen ausgezeichneten Beobachtungsmethode, einen über Erwarten hohen Grad von Genauigkeit haben, und es ist weiter auch ersichtlich, warum die Werte, die der kritischen Temperatur nahe liegen, eine etwas größere Ungenauigkeit zeigen müssen.

Als Resultat der an Isopentan ausgeführten Berechnung ergibt sich also:

Die Beziehung

$$p = c R \vartheta \ln \frac{v^2}{v_1}$$

ist als richtig zu betrachten; das Resultat ist ohne jede hypothetische Annahme allein durch Berechnung gewonnen, die sich unmittelbar auf das Beobachtungsmaterial stützt; ist also als ein reines Beobachtungsergebnis zu betrachten. Der Faktor  $c$  ist in dem ganzen Beobachtungsgebiet also bei Isopentan zwischen  $t = 10^\circ \text{C.}$  und  $t = t_k = 187,8^\circ \text{C.}$  konstant und hat den Mittelwert  $c = 1,70$ .

3. Hr. A. Richter<sup>1)</sup> hat auf meine Veranlassung dann die gleiche Berechnung für eine Reihe anderer Stoffe ausgeführt. Das Ergebnis ist kurz folgendes:

Bei Äthyläther<sup>2)</sup> mit den kritischen Daten  $t_k = 194,4^\circ \text{C.}$ ,  $v_k = 3,81 \text{ cm}^3$ ,  $p_k = 27060$  bestätigt sich die aufgestellte Beziehung in gleicher Weise; die Werte des Faktors  $c$  liegen zwischen 1,710 und 1,745, ihr Mittelwert ist  $c = 1,73$ . Nur in unmittelbarster Nähe der kritischen Temperatur sind, wie bei Isopentan, etwas größere Abweichungen.

Bei Benzol<sup>3)</sup>

$$t_k = 288,5^\circ \text{C.}, \quad v_k = 3,291 \text{ cm}^3, \quad p_k = 36395 \text{ mm Hg}$$

1) Inaug.-Diss. Rostock 1908.

2) Nach den Beobachtungen von Ramsay u. Young, Phil. Trans. 178. p. 57—93. 1887.

3) S. Young, Journ. chem. soc. 55. p. 486—521. 1889; 59. p. 125 bis 139. 1891.

besteht Konstanz des Faktors  $c$  in den Grenzen 1,696 und 1,724, der Mittelwert ist  $c = 1,71$ . Bei dieser Substanz ist auch in unmittelbarster Nähe der kritischen Temperatur die Konstanz des Faktors  $c$  erhalten.

Um Substanzen ganz anderer chemischer und physikalischer Eigenschaften zu untersuchen, wurden weiter berechnet:

Kohlensäure<sup>1)</sup>:  $t_n = 31,35^\circ \text{C.}$ ,  $v_n = 2,155 \text{ cm}^3$ ,

$p_n = 72,9 \text{ Atm.}$

Auch hier ergab sich im Temperaturintervall  $-25^\circ \text{C.}$  bis  $+30^\circ \text{C.}$  Konstanz des Faktors  $c$  in den Grenzen 1,698 und 1,731 mit dem Mittelwert  $c = 1,717$ .

Schweflige Säure:  $t_n = 156^\circ \text{C.}$ ,  $v_n = 1,923 \text{ cm}^3$ ,

$p_n = 78,9 \text{ Atm.}$

Die Konstanz des Faktors  $c$  ist hier in dem Beobachtungsgebiet zwischen 0 und  $156^\circ \text{C.}$  nicht eine so vollkommene wohl deshalb, weil die älteren Beobachtungsdaten von Regnault und Cailletet und Mathias nicht einen solchen Grad von Genauigkeit haben, wie die Daten der vorher angeführten Stoffe. Der Faktor  $c$  schwankt zwischen 1,642 und 1,789, ohne jedoch einen systematischen Gang zu verwerten. Der Mittelwert ist:  $c = 1,73$ .

Endlich auch bei

Wasser<sup>2)</sup>  $t_n = 365^\circ \text{C.}$ ,  $p_n = 200,5 \text{ Atm.}$ ,  $v_n = 2,33 \text{ cm}^3$ ,

nach Nadejdim dagegen  $v_n = 4,812 \text{ cm}^3$ , nach Batelli ergibt sich, daß der Faktor  $c$  zwischen  $100^\circ \text{C.}$  und  $170^\circ \text{C.}$  von den Werten 1,62—1,67 kontinuierlich wächst, dann aber zwischen  $170^\circ \text{C.}$  und  $270^\circ \text{C.}$  innerhalb der Werte 1,685 und 1,729 konstant bleibt mit dem Mittelwert  $c = 1,707$ . Nach diesen unmittelbar an die Beobachtungen angeschlossenen Berechnungen kann man wohl die Behauptung aufstellen, daß die in Gleichung (5) aufgestellte Beziehung zwischen der inneren Verdampfungswärme,

1) Nach den Daten von Amagat.

2) Nach W. Ramsay u. S. Young, Phil. Trans. 183. p. 107 bis 130. 1892.

der Temperatur und den Sättigungsvoluminis wenigstens für die „normalen“ Stoffe allgemeine Gültigkeit hat.

4. Das weitere auffallende Ergebnis, daß der Faktor  $c$  bei allen berechneten Substanzen trotz aller Verschiedenheiten der chemischen und physikalischen Eigenschaften den fast gleichen Wert 1,72 hat, findet eine einfache Deutung. Für den kritischen Zustand aller „normalen“ Substanzen hat S. Young aus seinen Beobachtungen die erste Regel gefolgert, daß ist:

$$\frac{R \vartheta_n}{p_n v_n} = 3,7,$$

oder, da  $R \vartheta_n / v_n = P_n$  der Druck ist, der nach den idealen Gasgesetzen eintreten müßte, daß der ideale kritische Druck  $P_n$  3,7 mal so groß ist als der tatsächlich beobachtete Druck  $p_n$ . Die Verhältniszahl für  $P_n/p_n$  zeigt bei verschiedenen normalen Stoffen geringe Abweichungen, die Zahl 3,7 ist der Mittelwert der zwischen 3,5 und 3,9 liegenden Einzelzahlen, die sich für normale Stoffe ergeben, während anormale Stoffe wie Alkohol und Essigsäure wesentlich verschiedene Verhältniszahlen berechnen lassen.

Ferner folgt aus S. Youngs Beobachtungen die zweite<sup>1)</sup> für den kritischen Punkt bestehende Regel, daß

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_n = \frac{R}{\frac{1}{2} v_n}$$

ist, oder daß — ebenfalls mit geringen Abweichungen bei den normalen Substanzen — der Spannungskoeffizient gerade doppelt so groß ist, als er nach den idealen Gasgesetzen sein müßte. Da in dem bekannten  $p v$ -Diagramm der Spannungskoeffizient gleich dem Vertikalabstand der Druckisothermen bei konstantem Volumen dargestellt ist, so trägt die zweite Regel dem Umstände Rechnung, daß die Druckisothermen in der Nähe des kritischen Punktes stark auseinandergezogen sind, und zwar nach der empirischen Regel so stark, daß ihr Vertikalabstand gerade doppelt so groß ist, als er nach den idealen Gasgesetzen sein sollte.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. p. 144—153. 1903.

Beide Regeln zusammen geben für die Energieänderung im kritischen Zustand

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)_\kappa &= \vartheta_\kappa \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_\kappa - p_\kappa = 6,4 \cdot p_\kappa = \frac{6,4}{3,7} \cdot \frac{R \vartheta_\kappa}{v_\kappa} \\ &= 1,73 \cdot \frac{R \vartheta_\kappa}{v_\kappa} \end{aligned} \right.$$

Dies ist der Faktor, der aus der Berechnung der Verdampfungswärmen sich ergab, und seine Bedeutung übersieht man am besten, wenn man die vorstehende Gleichung in der Form

$$(6a) \quad v_\kappa \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)_\kappa = 1,73 \cdot R \vartheta_\kappa$$

schreibt und sich vergegenwärtigt, daß  $(\partial U / \partial v)_\kappa$  die Energieänderung für die Raumeinheit,  $v_\kappa \cdot (\partial U / \partial v)_\kappa$  also die Energieänderung für so viel Raumeinheiten darstellt, als durch  $v_\kappa$  gegeben ist. Und da in  $v_\kappa$  Raumeinheiten die Masseneinheit 1 g Substanz enthalten ist, stellt also der links stehende Ausdruck die auf die Gewichtseinheit berechnete Änderung der Gesamtenergie der Substanz im kritischen Zustand dar; sie ist mit geringen individuellen Abweichungen 1,73 mal so groß als  $R \vartheta_\kappa$ , einer Größe, die der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Molekularbewegung proportional ist.

Das merkwürdige Ergebnis, daß bei Berechnung der Verdampfungswärmen aller untersuchten normalen Substanzen trotz aller Verschiedenheit chemischer und physikalischer Eigenschaften der fast gleiche Faktor  $c$  eintritt, hat also darin seinen Grund, daß für alle diese im kritischen Zustand die Änderung der Gesamtenergie zur Energie der fortschreitenden Bewegung in einem bestimmten konstanten Verhältnis steht.

Es würde von Interesse sein, auch für anormale Substanzen die Berechnung durchzuführen; der Umstand, daß auch Wasser sich in hohen Temperaturen „normal“ verhält, wie es aus der Berechnung der Verdampfungswärme hervorgeht, ist mir schon einmal bei Berechnung der Dampfdrucke<sup>1)</sup> aufgefallen. Führt man die Gleichung (6) bzw. (6a) in den Ausdruck (5) für die Verdampfungswärme ein, so kommt

$$Q = c R \vartheta_\kappa \cdot \frac{\vartheta}{v_\kappa} \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = c R \vartheta_\kappa \cdot \tau \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 15. p. 860–864. 1904.



Nach der Theorie der korrespondierenden Zustände ist bei gleichen reduzierten Temperaturen  $\tau$ ,  $v_1$  der gleiche Bruchteil von  $v_\infty$  und  $v_2$  das gleiche Vielfache von  $v_\infty$ . Aus dem Verhältnis fällt  $v_\infty$  heraus und folglich hat  $\ln v_2/v_1$  bei gleichem  $\tau$  für alle normalen Substanzen den gleichen Wert.

Folglich ist bei gleichen reduzierten Temperaturen die Verdampfungswärme aller Substanzen proportional  $R \vartheta_\infty$  oder auf die Mole berechnet proportional der kritischen Temperatur der Substanz.

Die Theorie der korrespondierenden Zustände trifft nicht genau zu; stellt man sich aber  $\ln v_2/v_1$  als Funktion von  $\tau$  graphisch dar, so zeigen die hier berechneten Substanzen nur so geringe Abweichungen, daß man die Kurven als identisch ansehen kann. Es würde von größtem Interesse sein, die Funktion von  $\tau$ , welche  $\ln v_2/v_1$  darstellt, aufzufinden und damit die Verdampfungswärme  $\rho$  als Funktion der Temperatur allein darzustellen. Dieses Problem, welches auch weiter unten wieder hervortritt, ergibt sich hier als das wichtigste; seine Lösung ist mir bisher nicht gelungen. Es ist aber sicher, daß mit seiner Lösung zugleich auch ein wesentlicher Schritt zu der Fundamentalfrage, den Dampfdruck in rationeller Weise als Funktion der Temperatur darzustellen, getan sein wird, und wahrscheinlich, daß die Abweichungen vom Gesetz der korrespondierenden Zustände sich durch die geringen Differenzen des Faktors  $c$  bedingt ergeben werden, die ihrerseits wieder bedingt sind durch die kritischen Daten der verschiedenen Substanzen.

5. Die Übersicht über die nachfolgende Berechnung, die ich allerdings nur für Isopentan durchführen kann, weil nur für diese Substanz die nötigen experimentellen Daten vorliegen, wird wesentlich erleichtert, wenn man, wie ich es für Wasser<sup>1)</sup> in beschränktem Maße getan habe, das Energiediagramm für Isopentan in einem  $U, v$ -Blatt entwirft. Hr. Kleiminger<sup>2)</sup> hat auf meine Veranlassung die Berechnung vollständig durchgeführt. Ich entnehme die Zahlen der folgenden Tabelle und das sie darstellende Diagramm seiner Arbeit.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 16. p. 907—930. 1905.

2) R. Kleiminger, Inaug.-Diss. Rostock 1907.



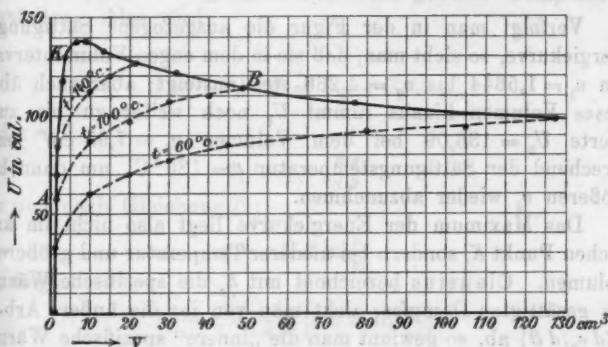
Setzt man den Energieinhalt des flüssigen Isopentans bei  $t = 0^\circ \text{C.}$  willkürlich  $U_0 = 0$ , so ist der Energieüberschuß  $U_1 - U_0$  bei der Temperatur  $\vartheta$ , solange die Substanz noch flüssig ist, also in den Temperaturgrenzen  $\vartheta_0$  bis  $\vartheta_*$  entsprechend den Volumengrenzen  $v_0$  bis  $v_*$ , gegeben durch

$$U_1 - U_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} c_i d\vartheta,$$

worin  $c_i$ , die „innere“ spezifische Wärme, definiert ist als die spezifische Wärme  $c_s$  der Flüssigkeit im Sättigungszustand, vermindert um die mit der Flüssigkeitsausdehnung verbundene äußere Arbeit; also

$$c_i = c_s - p_s \cdot \frac{dv_s}{d\vartheta}.$$

Diese spezifische Wärme ist von mir<sup>1)</sup> für Isopentan experimentell bis zur kritischen Temperatur bestimmt, und den Daten entsprechend ist in Tab. 2 der Wert von  $U_1 - U_0$  angegeben und in der Figur als Funktion des jeder Temperatur entsprechen-



den Sättigungsvolumens eingezeichnet. Zu jedem Volumen  $v_1$  gehört ein bestimmtes zweites Sättigungsvolumen  $v_2$ , und der Energieüberschuß

$$U_2 - U_1 = q$$

ist durch die Verdampfungswärme gegeben. Dadurch ist die Energiekurve der Sättigungszustände in einem  $Uv$ -Blatt konstruierbar.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. p. 154—185. 1903.

Tabelle 2.  
Isopentan.

$\vartheta$	$v_1$ cm <sup>3</sup>	$U_1$ cal	$v_2$ cm <sup>3</sup>	$U_2$ cal
273	1,5644	0	900	80,48
293	1,614	10,4	424	85,76
313	1,670	21,25	224,2	91,25
333	1,734	32,40	128	98,74
353	1,805	44,6	78	106,35
373	1,895	57,05	49,5	113,89
393	2,004	70,00	32,3	120,96
413	2,154	83,15	21,1	126,95
433	2,378	97,50	13,71	132,74
453	2,859	115,1	7,95	136,09
456	3,020	118,6	7,04	135,85
459	3,303	123,55	5,96	135,42
460,8	4,266	130,70	4,266	130,70

Verfolgt man in der Figur die ausgezogene Sättigungsenergiekurve, so sieht man, daß sie in dem engen Volumintervall von  $v_1 = 1,5644$  bis  $v_2 = 4,266$  steil ansteigt; aber auch über dieses Volumen hinaus nimmt  $U_1$  noch weiter zu bis zum Werte  $U_2 = 136,09$  bei dem Volumen  $v_2 = 7,95$  cm<sup>3</sup> entsprechend der Sättigungstemperatur  $t = 180^\circ \text{C.}$ , um dann bei größeren  $v_2$  wieder abzunehmen.

Das Maximum der Energiekurve liegt also nicht im kritischen Punkt  $K$ , sondern bei niederer Temperatur und größerem Volumen. Clausius bezeichnet mit  $h_s$  die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes; zieht man von ihr die äußere Arbeit  $p_s(dv_2/d\vartheta)$  ab, so gewinnt man die „innere“ spezifische Wärme oder die Energieänderung im gesättigten Dampfzustand durch

$$h_i = \left( \frac{dU_s}{d\vartheta} \right)_s = h_s - p_s \frac{dv_2}{d\vartheta}$$

analog der inneren spezifischen Wärme der Flüssigkeit.

Im  $Uv$ -Blatt ist  $\partial U_1/\partial v$  durch die Neigung der Energie-sättigungskurve gegeben. Da diese zwischen  $v_0$  und  $v_2$  stets wächst, ist also auch die auf  $1^\circ \text{C.}$  berechnete Energieänderung

$$c_i = \frac{dU_1}{d\vartheta} = \frac{\partial U_1}{\partial v} \cdot \frac{dv_1}{d\vartheta}$$

stets positiv, da  $dv_1/dt$  auch stets positiv ist bis zum kritischen Punkt.

Im Dampfzustand der Energiekurve ist aber zwischen  $v_n$  und  $v_m = 7,95 \text{ cm}^3$ , den Temperaturen  $t_n$  und  $t = 180^\circ \text{ C.}$  entsprechend  $\partial U_s/\partial v$  positiv, dagegen  $dv_2/d\vartheta$  negativ und folglich in diesem Intervall

$$h_i = \frac{dU_s}{d\vartheta} = \frac{\partial U_s}{\partial v} \frac{dv_2}{d\vartheta}$$

negativ, während es für den weiteren Verlauf der Energiekurve stets positiv ist, weil beide  $h_i$  zusammensetzenden Faktoren für sich negativ sind.

Das Diagramm läßt sofort ablesen, daß  $\int_{\phi}^{\phi_n} c_i d\vartheta$  die Höhendifferenz zwischen den Punkten  $K$  und  $A$  darstellt und ebenso  $\int_{\phi}^{\phi_n} h_i d\vartheta$  die Höhendifferenz zwischen  $K$  und  $B$ , wenn  $A$  und  $B$  die zwei Sättigungszustände bei gleicher Temperatur darstellen. Also wird:

$$\int_{\phi}^{\phi_n} (h_i - c_i) d\vartheta = U_2 - U_1 = \varrho$$

und somit

$$h_i - c_i = \frac{d\varrho}{d\vartheta}.$$

Da nun nach Gleichung (5)

$$\varrho = c R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}$$

ist, folgt

$$(8) \quad h_i - c_i = \frac{d}{d\vartheta} \left\{ c R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1} \right\}.$$

Oder

$$(8a) \quad \begin{cases} c_i = \frac{d}{d\vartheta} \{ c R \vartheta \ln v_1 \} + f(\vartheta) + A, \\ h_i = \frac{d}{d\vartheta} \{ c R \vartheta \ln v_2 \} + f(\vartheta) + A, \end{cases}$$

worin  $f(\vartheta)$  und  $A$  eine unbekannte Funktion von  $\vartheta$  bzw. eine Konstante bedeuten, die bei der Differenzbildung herausfallen.

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß, wenn man  $c_i$  und  $h_i$  als Funktion der Temperatur allein darstellen will, man wieder

die Vorfrage zu lösen hat, die Sättigungsvolumina  $v_1$  und  $v_2$  als Temperaturfunktionen darzustellen. Das ist dasselbe Problem, welches schon im vorigen Abschnitt hervortrat, dessen Lösung aussteht. Eine allgemeine weitere Verfolgung ist damit abgeschnitten; aber da  $c_i$  für Isopentan beobachtet ist und damit auch  $h_i$  durch

$$h_i = c_i + \frac{d q}{d \vartheta}$$

gegeben ist, andererseits auch die Ausdrücke  $c R \vartheta \ln v_1$  und  $c R \vartheta \ln v_2$  ohne weiteres aus den Beobachtungsdaten berechenbar sind, so kann man aus diesen Daten wenigstens einen Schluß ziehen auf die Zusatzglieder in Gleichung (8a).

Es ergibt sich das einfache Resultat, daß man mit großer Annäherung auch setzen kann:

$$(9) \quad \begin{cases} c_i = \frac{d}{d \vartheta} \{c R \vartheta \ln v_1\} + \alpha \vartheta, \\ h_i = \frac{d}{d \vartheta} (c R \vartheta \ln v_2) + \alpha \vartheta, \end{cases}$$

worin für Isopentan zu setzen ist

$$\alpha = 0,0016 \frac{\text{cal}}{^\circ \text{C.}^2}.$$

Inwieweit diese empirische Darstellung den Beobachtungen genügt, zeigt die Tab. 3 in der unter  $c_i$  und  $h_i$  „berechnet“ die nach dieser Gleichung berechneten Werte verglichen sind mit den direkten Beobachtungswerten von  $c_i$  bezüglich von

$$h_i = c_i - \frac{d q}{d \vartheta}.$$

Alle Größen sind in cal/ $^\circ \text{C.}$  gemessen.

Vergleicht man die berechneten  $c_i$ -Werte mit den beobachteten, so bemerkt man, daß die Übereinstimmung zwar durchaus nicht vollkommen, aber doch im ganzen zufriedenstellend ist. Man kann füglich nicht mehr erwarten, denn alle in der Tabelle vorkommenden Größen sind Differentialquotienten, die nur durch Differenzbildung aus den beobachtbaren Integralwerten gewonnen sind.

Auch die „berechnete“ Energieänderung  $h_i$  des gesättigten Dampfes stimmt recht befriedigend mit der zwar nicht unmittelbar beobachteten, aber doch aus den Beobachtungen in

Tabelle 3.  
Isopentan:  $c = 1,70$ .

	$0,0016 \vartheta$	$\frac{d}{d\vartheta} c R \vartheta \ln v_1$	$\frac{d}{d\vartheta} c R \vartheta \ln v_2$	$c_i$ berechnet	$h_i$ berechnet	$c_i$ beobachtet	$\frac{d\vartheta}{d\vartheta}$	$h_i$
283	0,458	0,043	-0,190	0,496	0,263	0,518	-0,280	0,233
293	0,469	0,045	-0,190	0,504	0,279	0,528	-0,260	0,268
303	0,485	0,048	-0,178	0,533	0,307	0,547	-0,238	0,309
313	0,501	0,049	-0,178	0,550	0,323	0,556	-0,228	0,328
323	0,517	0,052	-0,178	0,569	0,339	0,571	-0,228	0,343
333	0,538	0,054	-0,180	0,587	0,353	0,597	-0,238	0,389
343	0,549	0,060	-0,181	0,609	0,368	0,608	-0,233	0,370
353	0,565	0,064	-0,184	0,629	0,381	0,620	-0,235	0,385
363	0,581	0,069	-0,191	0,650	0,390	0,640	-0,265	0,375
373	0,597	0,075	-0,202	0,672	0,395	0,662	-0,285	0,377
383	0,613	0,082	-0,211	0,695	0,402	0,685	-0,287	0,398
393	0,629	0,090	-0,223	0,719	0,406	0,707	-0,306	0,401
403	0,645	0,102	-0,240	0,747	0,405	0,724	-0,342	0,382
413	0,661	0,116	-0,262	0,777	0,399	0,753	-0,374	0,379
423	0,677	0,136	-0,294	0,813	0,388	0,798	-0,432	0,361
433	0,693	0,170	-0,350	0,863	0,343	0,856	-0,532	0,324
443	0,709	0,286	-0,450	0,995	0,259	0,950	-0,715	0,285
453	0,725	0,478	-0,705	1,20	0,020	1,17	-1,20	0,000
463	0,738	?	?	?	?	?	?	?
460,8	0,738	?	?	?	?	?	?	?

anderer Weise abgeleiteten Werten gut überein. Der merkwürdige Verlauf dieser Größe, die von niederen Temperaturen beginnend erst wächst, durch ein Maximum hindurchgeht, um bei Temperaturen nahe der kritischen durch den Wert 0 hindurch zu negativen Werten überzugehen, die aber wegen der Unsicherheit der Bildung der Differentialquotienten nicht sicher berechenbar sind, ist richtig dargestellt.

Hiernach erscheint die Darstellung

$$c_i = \frac{d}{d\vartheta} (c R \vartheta \ln v_1) + \alpha \vartheta,$$

$$h_i = \frac{d}{d\vartheta} (c R \vartheta \ln v_2) + \alpha \vartheta$$

gerechtfertigt, worin für Isopentan  $\alpha = 0,0016$  zu setzen ist.

Es wäre von Interesse, die Bedeutung des Faktors

$$\alpha = \left[ \frac{\text{cal}}{^\circ \text{C.}^2} \right]$$

zu ermitteln. Vermutlich wird auch er mit den kritischen Daten in Zusammenhang stehen. Da bisher nur die eine Substanz, Isopentan, in genügendem Umfange beobachtet vorliegt, ist es mir noch nicht gelungen, diesen Faktor  $\alpha$  zu deuten.

6. Alle weiteren Folgerungen, welche aus der Beobachtungstatsache, welche durch Gleichung (5) dargestellt ist, abgeleitet werden können, verlangen eine bestimmte Annahme für die Ausdehnungswärme  $(\partial U / \partial v)_\theta$ .

Es liegt ja natürlich nahe anzunehmen, daß zwischen den Sättigungspunkten

$$\left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)_\theta = \frac{c R \vartheta}{v}$$

zu setzen ist, oder anzunehmen, daß, wie es in der Figur durch die punktierten Kurven angedeutet ist, die Energieisothermen im Zweiphasengebiet logarithmische Kurven sind.

Diese Annahme ist zwar die einfachste, aber nicht die einzig zulässige, denn eine jede beliebige Kurve, welche nur an den Sättigungspunkten zu der gleichen Energiedifferenz

$$U_2 - U_1 = q = c R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}$$

führt, würde zulässig sein.

Es ist aber weiter sofort ersichtlich, daß eine jede Annahme für die Ausdehnungswärme durch

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_p = \vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} - p$$

auf einen ganz bestimmten Verlauf der Druckisotherme führt. Da nun für den Verlauf der Druckisotherme durch das Maxwellsche Theorem ganz bestimmte Bedingungen gegeben sind, so ist nur eine solche Annahme zulässig, die auch mit diesem Theorem in Einklang sind. Meine umfangreichen Berechnungen, nach dieser Richtung weiter zu kommen und damit auch das Problem der Zustandsgleichung zu fördern, haben noch nicht zu genügend klaren Resultaten geführt.

Kiel, Januar 1908.

(Eingegangen 16. Januar 1908.)

## 7. Die magnetischen Eigenschaften elektrolytischer Eisenniederschläge; von K. Schild.

### Einleitung.

Die magnetischen Eigenschaften des durch Elektrolyse gewonnenen Eisens sind verhältnismäßig wenig untersucht worden. Insbesondere haben sich Beetz, Leick und Maurain mit der Prüfung dieses Gegenstandes befaßt. Die Versuche von Leick geben Aufschluß über die Permeabilität des elektrolytischen Eisens<sup>1</sup>, während Beetz<sup>2</sup> und Maurain<sup>3</sup> im wesentlichen der Frage nach dem magnetischen Verhalten von solchen Eisenniederschlägen sich zuwandten, welche während ihrer Bildung der Einwirkung einer konstanten magnetisierenden Kraft ausgesetzt waren. Maurain variierte diese Kraft innerhalb der Grenzen  $H = 0$  bis  $H$  ca. 10, also über ein beschränktes Intervall hin. Über die Größe der Hysteresisarbeit für elektrolytisch gewonnenes Eisen gibt die Literatur, soviel ich sehe, keine Auskunft und es scheint, daß diese Frage noch nicht behandelt worden ist. Diese Sachlage veranlaßt mich

1. die Maurainschen Versuche zu wiederholen und dabei das Kraftintervall bedeutend zu vergrößern;
2. die Hysteresisverluste elektrolytischer Eisenniederschläge zu ermitteln und nebenbei auch
3. den Verlauf der Permeabilität derselben festzustellen.

Die gewonnenen Versuchsergebnisse bilden den Inhalt meiner im Eidg. physik. Institut Zürich entstandenen Habilitationsarbeit, welche ich im Auszug folgen lasse.

### Die Versuchsobjekte und ihre Herstellung.

Zur Ausführung der Elektrolyse benutzte ich folgenden Apparat (Fig. 1).

- 1) W. Leick, Wied. Ann. 58. p. 691. 1896.
- 2) E. Beetz, Fortschritte der Physik 1880.
- 3) Ch. Maurain, Compt. rend. p. 410. 1900.



Ein zylindrisches Glasgefäß von ca. 4 cm lichter Weite und 41 cm Länge, auf der einen Seite offen, auf der anderen mit Schlauchansatz versehen, diente zur Aufnahme der Flüssigkeit und zur Anbringung der Anoden. Als solche wählte ich Platindrähte von 1 mm Dicke und ca. 37 cm Länge. Das Glasgefäß trug bei der Einkröpfung an der Stelle des Querschnittes  $a-b$  drei um  $120^\circ$  gegeneinander versetzte kleine Öffnungen und ebenso war der Boden des Gefäßes mit drei korrespondierenden Löchern versehen. Durch diese Öffnungen wurden drei Platindrähte eingeführt. Die Befestigung unten erfolgte durch Umwickeln um kleine, am Boden angebrachte Glaszäpfchen. Nachdem die Platindrähte straff gespannt waren, wurden sie oben an ein über den Kopf der Glasröhre geschobenes Messingband, welches die Stromzuleitung  $C$  trug, angelötet. In dieses zylindrische Glasgefäß konnte der Kathodenträger eingeschoben werden und zwar so, daß die Kathode genau in die Achse der Röhre fiel. Um diese axiale Stellung bequem zu erreichen, gab ich ihrem Träger folgende Gestalt (Fig. 2).

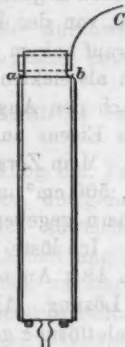


Fig. 1.

Zwei Glasstäbe  $c, d$  von ca. 5 mm Dicke und  $34\frac{1}{2}$  cm Länge trugen an den Enden kreisförmige Glasscheibchen von ca. 5 mm Dicke und einem Durchmesser, der so bemessen war, daß der ganze Träger ohne Mühe gerade noch in die eben beschriebene Glasröhre eingeführt werden konnte. Als Kathode verwendete ich ausnahmslos Kupferdraht von 0,9 mm Dicke. Derselbe wurde durch die in der Mitte der Scheiben gelegenen Öffnungen  $o-o'$  hindurchgezogen und, nachdem das untere Ende mit einem kleinen Knoten versehen war, wickelte man das obere Ende um den kleinen zylindrischen Glasansatz  $f$  und führte den Leiter von hier nach außen.



Fig. 2.

Das zylindrische Gefäß konnte oben verschlossen werden mittels eines Gummipropfens, der zwei Öffnungen besaß: eine

kleine Öffnung zum Durchlassen der Kathode und eine etwas größere, durch welche ein Glasröhrchen eingeschoben war, diente zum Entweichen der bei der Elektrolyse sich bildenden Gase.

Da es nicht im Rahmen meiner Arbeit lag, die magnetischen Eigenschaften des elektrolytischen Eisens in Abhängigkeit von der Lösung zu untersuchen, sondern da es mir nur darauf ankam, ein möglichst reines Eisen zu erhalten, so wählte ich als elektrolytische Flüssigkeit oxalsaures Ammondoppelsalz. Nach den Angaben von B. Neumann erfolgt die Abscheidung des Eisens aus diesem Doppelsalz am besten.

Mein Zersetzungsapparat faßte eine Flüssigkeitsmenge von ca. 500 cm<sup>3</sup> und die Lösung wurde nach folgendem, von Neumann gegebenen Rezept hergestellt:

Ich löste 3 g FeSO<sub>4</sub> in 150 cm<sup>3</sup> Wasser. Ebenso brachte ich 18 g Ammoniumoxalat in 325 cm<sup>3</sup> Wasser durch Erwärmen in Lösung. Alsdann wurde die Eisenoxydullösung zu Ammonoxalatlösung gegeben und so lange gerührt, bis der entstehende Niederschlag gelöst war. Es ist darauf zu achten, daß nicht etwa aus Versehen in umgekehrter Weise verfahren wird, denn dann bildet sich ein Niederschlag aus Eisenoxyduloxalat, der nur sehr schwer wieder gelöst werden kann. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß es zum Gelingen eines glatten, kohärenten, tadellosen Niederschlages durchaus erforderlich ist, absolut reine Salze in chemisch reinem, destilliertem Wasser zu lösen; ebenso müssen die Elektroden äußerst sorgfältig vor Beginn der Elektrolyse gereinigt werden, ganz besonders die Kathode; wenn nur die kleinsten Spuren von Unreinheiten, wie z. B. Fett, hier vorhanden sind, so genügt das schon, um mit Sicherheit den Versuch mißlingen zu lassen. Das niedergeschlagene Eisen ist an diesen Stellen nicht kohärent und fällt bei kleinen Erschütterungen ab. Ich habe mit folgender Behandlung der Kathode gute Erfahrungen gemacht: Vor dem Einspannen des Kupferdrahtes in den Kathodenträger wurde jener mittelst Schmiergelpapier mechanisch gereinigt, alsdann so lange durch ein weißes Fließpapier gezogen, bis kein schwarzer Strich mehr zurückblieb. Nun folgte, nachdem der Kupferdraht an seinem Träger befestigt war, die chemische Reinigung, zunächst durch Behandlung mit reiner, verdünnter Salpetersäure, dann mit konzentriertem Alkohol oder Äther und schließlich

mit reinem, destilliertem Wasser. — Die Elektrolyse wurde mit einer Stromdichte von 1 bis 1,5<sup>a</sup> (pro 100 cm<sup>2</sup>) durchgeführt; dies erwies sich als zweckmäßig, da für größere Ströme die Niederschläge oft rauh und brüchig, für kleinere oft schwammig wurden.

Das gewonnene elektrolytische Eisen hatte durchwegs eine hellglänzende, graue Farbe und eine äußerst glatte, homogene Oberfläche.

In folgender Tabelle sind alle Daten sämtlicher hergestellten Versuchsobjekte enthalten.

Die Objekte I, II und III wurden zur Messung der Permeabilität und der Hysteresisverluste benutzt. Da die gefundenen Werte der Permeabilität nicht unerheblich abweichen von denjenigen Werten, welche Leick in seiner Arbeit angibt, so stellte ich nachträglich, um einen Kontrollversuch ausführen zu können, einen Eisenniederschlag her unter genau denselben Bedingungen, wie sie bei Leick bestanden. Dieser Eisenüberzug trägt in der Tabelle die Marke „A“. Als Kathode wurde bei der Bildung dieses Objektes in Übereinstimmung mit Leick ein Stab aus „reinstem käuflichen Eisen“ verwendet. Ferner benutzte ich als Flüssigkeit, wie Leick, eine Lösung von FeSO<sub>4</sub> und zwar brachte ich 10 g FeSO<sub>4</sub> in 500 cm<sup>3</sup> Wasser in Lösung. Die Eisenmasse des Stabes A ist nach Tabelle

$$M = 3,8793 \text{ g.}$$

10 g FeSO<sub>4</sub> enthalten aber nur 2,01 g Eisen. Sobald diese 2 g elektrolytisch nahezu ausgeschieden waren, wurde der Zersetzungsapparat entleert, gereinigt und mit frisch hergestellter Lösung wieder in Tätigkeit gesetzt. — Diese Erneuerung der Flüssigkeit war für die Objekte A und III eine Notwendigkeit; sie ist indessen überall da empfehlenswert, wo sich die Elektrolyse über mehrere Stunden hin erstreckt, denn es kann sich leicht im Laufe der Zeit der Elektrolyt verunreinigen, so daß unhomogene Niederschläge erhalten werden.

Die Orientierung des Apparates, in welchem die Ausscheidung des Eisens vor sich geht, darf während der Dauer der Elektrolyse keine beliebige sein. Schon Beetz hat die Beobachtung gemacht, daß eine beliebige kleine, während der Ausscheidung wirksame magnetisierende Kraft genügte, um die

Nr.	Lösung	Masse	Vol.	Länge	Pol- abstand	Dicke der Eisenschicht	i Elektrolyse	Strom- dichte	$i_m$	H
I	$(\text{NH}_4)_2\text{C}_2\text{O}_4$	0,2856	0,08641	33,98	28,32	0,0340	0,125*	1,11*	—	—
II		0,3622	0,04875	33,14	27,62	0,0468	"	"	—	—
III		1,7433	0,2228	33,43	27,96	0,212	"	"	—	—
1	"	0,1540	0,01964	32,50	27,08	Mittel 0,0177	0,127	1,12	0	0,2
2	"	0,1343	0,01713				"	"	0,0465*	1,00
3	"	0,1427	0,01820				"	"	0,0863	2,10
4	"	0,1442	0,01839				"	"	0,1504	3,70
5	"	0,1495	0,01906				"	"	0,280	6,40
6	"	0,1338	0,01706	32,50	27,08	Mittel 0,0177	"	"	0,360	8,87
7	"	0,1411	0,01799				"	"	0,547	13,80
8	"	0,1397	0,01781				"	"	0,702	17,30
9	"	0,1259	0,01605				"	"	0,873	21,50
10	"	0,1520	0,01938	34,39	28,66	0,448	"	"	1,174	29,0
A	$\text{FeSO}_4$	3,8793	0,4948				0,116	1,07	—	—

Eisenmoleküle teilweise zu „richten“ und so dem niedergeschlagenen Eisen permanenten Magnetismus zu verleihen. Schon der Einfluß des erdmagnetischen Feldes genügt, um dieses Resultat zu erzielen.

Um nach Möglichkeit die sich niederschlagenden Eisenmoleküle dem Einfluß der erdmagnetischen Richtkraft zu entziehen, stellte ich vor Beginn der Elektrolyse die Zersetzungsröhre in der Ebene des Meridians so auf, daß ihre Achse  $\perp$  stand zur Richtung der erdmagnetischen Kraft. Die so erhaltenen Eisenniederschläge besaßen denn auch keinen wahrnehmbaren permanenten Magnetismus. Es war mir daher möglich, den Verlauf der Permeabilitätskurve auch für kleine magnetisierende Kräfte zu bestimmen, was bei den Leickschen Versuchen nicht der Fall war. Leick gibt selbst an, daß er wegen des Einflusses des erdmagnetischen Feldes seine Magnetisierungskurven erst von Kräften  $H = \text{ca. } 5$  an aufzunehmen in der Lage war.

Die Eisenniederschläge, welche in der Tabelle der Versuchsobjekte die Ziffern 1 bis 10 tragen, waren während ihrer Bildung einer konstanten magnetisierenden Kraft ausgesetzt. Um dies zu erreichen, schob ich das zylindrische Zersetzungsgefäß, das eine Länge hatte von ca. 41 cm und einen Durchmesser ca. 45 mm, in eine Magnetisierungsspule (Fig. 3) hinein, deren Daten die folgenden sind:

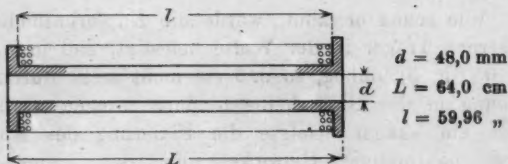


Fig. 3.

Auf diese Spule waren 1177 Windungen aus Kupferdraht von 15 mm Dicke aufgewickelt. Führen dieselben den Strom  $i$ , dann liefert die Spule ein Feld  $H$  von der Größe

$$H = \frac{0,4 \cdot \pi \cdot 1177}{59,96} \cdot i,$$

$$= 24,65 \cdot i_{\text{amp.}}$$

Ein jeder der Stäbe 1 bis 10 wurde nun während seiner Bildung einem Feld ganz bestimmter Stärke ausgesetzt. Diese Feldintensitäten können der Tabelle in Kolonne „H“ entnommen werden. Die Bedeutung der übrigen dort zusammengestellten Größen dürfte ohne weitere Erläuterung klar sein.

#### Die Massenbestimmung.

Anfänglich versuchte ich, die Massen der gewonnenen Eisenüberzüge durch Wägung zu bestimmen, durch Wägung der Kathode vor und nach der Elektrolyse. Verschiedene Gründe veranlaßten mich, diese Methode zu verlassen, und die Massenbestimmung meiner Versuchsobjekte durch die chemische Analyse vorzunehmen. Zum guten Gelingen der Eisenniederschläge ist es äußerst wichtig, daß die Kathode in sorgfältigst gereinigtem Zustande ins Eisenbad kommt. Hierfür dürfte man die höchste Gewähr haben, wenn unmittelbar nach dem Reinigungsprozeß zur Elektrolyse geschritten wird. Durch eine Wägung nach der Reinigung wäre es möglich, daß Staubeilchen der Luft usw. an der Kathode haften bleiben, und nur durch ein wiederholtes Reinigen brächte man sie in den Zustand, wie er für die Elektrolyse gefordert wird. Aber auch ein weiterer Grund, der zusammenhängt mit der Anordnung und Befestigung der Kathode während des Versuches, spricht gegen die Wägung, ja schließt sie beinahe vollständig aus.

Wie schon erwähnt, wurde die Kupferkathode an einem gläsernen Träger in der Weise befestigt, daß man jene unten bei 0 (Fig. 3) umbog, so daß sie nicht mehr durch die kleine Öffnung in der Glasscheibe hindurchgezogen werden konnte. Oben am Träger erfolgte die Fixierung des Kupferdrahtes durch paarmaliges Umwickeln um den kleinen gläsernen Ansatz *f*. Wohl wurden nun, um eine Ablagerung des Eisens an den Stellen der Kathode oberhalb der Scheibe *a* zu verhindern, die paar Windungen bei *f* und die Ableitung nach außen durch Auftragen einer dünnen Schellackschicht unleitend gemacht. Die beschriebene Anordnung der Kathode zwang mich aber doch, nur ein Stück derselben von passender Länge als Versuchsobjekt zu benutzen. Es handelt sich nun darum, die Eisenmasse zu kennen, welche auf diesem heraus-

geschnittenen Stücke abgelagert ist; an eine Bestimmung derselben durch Wägung kann wohl kaum gedacht werden. Ebenso dürfte die Massenbestimmung aus dem elektrochemischen Äquivalent heraus ausgeschlossen erscheinen, so daß als einziger Weg noch die chemische Analyse verbleibt.

Ich benutzte denn auch zur Bestimmung der Massen die maßanalytische Methode nach Margueritte, welches Verfahren darauf beruht, daß Ferrosalze in saurer Lösung durch Kaliumpermanganat zu Ferrisalzen oxydiert werden. Ist die Oxydation vollkommen beendet, so bewirkt schon der nächste Tropfen des Permanganats eine bleibende Rötung der Lösung, so intensiv, daß der Endpunkt der Reaktion äußerst scharf erkannt werden kann. Bei der Herstellung der Permanganatlösung, bei der Stellung des Titors sowohl, wie bei der Durchführung der Analyse selbst, folgte ich strenge den Angaben von Treadwell.<sup>1)</sup> Die durch dieses Verfahren gelieferten Massen sind in der Tabelle p. 590 enthalten.

#### Die Meßmethode.

Die Stab- bzw. Röhrenform meiner Versuchsobjekte bedingt zur Ermittlung ihrer magnetischen Eigenschaften die Wahl einer Magnetometermethode. Da die gegebenen Eisenmassen nur gering sind, so werden auch die Magnetometerausschläge nur klein sein können. Wohl ließe sich durch passende Astasierung die Empfindlichkeit des Magnetometers erhöhen. Frühere Erfahrungen haben mich indessen belehrt, daß der so erreichte Gewinn an Empfindlichkeit eine nicht wesentliche Verfeinerung der Methode bedeutet, weil der astasierte Magnet in viel höherem Maße störenden äußeren Einflüssen preisgegeben ist, und daß zudem die Kompensierung des Ausschlages, der herrührt vom Feld der Magnetisierungsspule, ganz besondere Schwierigkeiten bietet. Aus diesen Gründen habe ich von vornherein es unterlassen, auf dem angedeuteten Wege eine Verfeinerung meiner Meßmethode zu erreichen. Vielmehr war ich bestrebt, die Methode so zu wählen, daß alle äußeren Einflüsse nach Möglichkeit unschädlich gemacht werden und Vorkehrungen zu treffen, um die

1) Treadwell, *Analyt. Chem.* 2. p. 66.



„Kompensierung der Magnetisierungsspule“ zu einer möglichst vollkommenen zu machen. Um jenes zu erreichen, schien mir die Wahl einer Nullmethode am zweckmäßigsten zu sein, einer Nullmethode, wobei ähnlich dem Vorgehen von Lord Rayleigh<sup>1)</sup> und W. Schmidt<sup>2)</sup> der Magnetometerausschlag kompensiert wird vermittelt der berechenbaren Kraft eines stromdurchflossenen kreisförmigen Leiters. Th. Simon und E. Madelung veröffentlichten in der Physik. Zeitschr. (p. 410. 1904) eine Abhandlung, betitelt: „Über ein neues magnetometrisches Verfahren zur Messung magnetischer Momente“. Wurde auf diese Arbeit aufmerksam aus dem Grunde, weil ich glaubte, eine wirklich neue Methode zu finden, die sich für meine Zwecke vielleicht verwenden ließe. Dieses dort dargelegte Verfahren enthält indessen keine neuen Gedanken; prinzipiell wird lediglich von der Methode gesprochen, von der W. Schmidt vor ca. 10 Jahren schon Gebrauch machte. Außer der größeren Unempfindlichkeit gegen äußere Einflüsse bietet eine Nullmethode gegenüber der üblichen Magnetometermethode noch weitere wesentliche Vorteile. Es ist nämlich nicht erforderlich, daß man für den Ort des Magnetometers die Größe der Horizontalintensität der erdmagnetischen Kraft kennt. Dieser Umstand bedeutet bei der Vornahme absoluter Messungen nicht nur eine Bequemlichkeit, sondern hat auch den Vorzug, daß die Messungen von Schwankungen der Horizontalintensität völlig unabhängig sind. Wenn aber die Nullmethode unabhängig von  $H$  ist, so liegt hierin ein weiterer bedeutender Vorzug, auf den Erhard<sup>3)</sup> hinweist. Erhard konstatiert, daß die Magnetometermethode mit der üblichen Anordnung mit einem erheblichen Fehler behaftet ist. Die Wirkung, welche das Feld der Magnetisierungsspule auf die Magnetometernadel ausübt, wird in der Weise kompensiert, daß man den Magnetisierungsstrom durch eine zweite Spule, die „Kompensations-spule“ hindurchsendet, welche auf der anderen Seite des Magnetometers aufgestellt ist. Hat man durch passende Verschiebung derselben erreicht, daß die Kompensation eine voll-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 23. p. 225. 1887.

2) W. Schmidt, Wied. Ann. 54. p. 655. 1895.

3) Th. Erhard, Ann. d. Phys. 9. p. 724. 1902.



kommene ist, so darf hieraus nicht geschlossen werden, daß die beiden Spulenfelder keinerlei Kraftwirkungen auf die Magnetometernadel ausüben. Es können ganz wohl Kräfte auftreten, welche in der Ebene des magnetischen Meridians wirksam sind, und unter ihrem Einflusse wird die Nadel sich nicht bewegen. Wohl aber bedingen solche Kräfte eine Vergrößerung oder Schwächung der Horizontalintensität  $H$ , die aber als konstant vorausgesetzt wird. Th. Erhard bringt nun in seiner erwähnten Arbeit die Resultate von Messungen, die er über die durch die Spulenfelder bewirkten Änderungen von  $H$  angestellt hat.

Ehrhard fand:

für  $H = 0,92$  Änderung der Horizontalintensität  $= + 0,024$  Proz.

„  $H = 3,04$  „ „ „  $= + 0,08$  „

„  $H = 128,3$  „ „ „  $= + 3,4$  „

Bei sehr starken Feldern stieg die Änderung der Horizontalintensität sogar an auf 8 Proz., war aber in diesem Falle negativ.

Hieraus geht hervor, daß die Horizontalintensität um mehrere Prozent gefälscht werden kann und ein Fehler von derselben Größe müßte auch im Meßresultat stecken. Eine Nullmethode macht die Kenntnis von  $H$  überflüssig; diese Größe tritt bei der Berechnung der magnetischen Momente gar nicht auf. Es darf daher der Satz ausgesprochen werden, daß eine Nullmethode der üblichen Magnetometermethode ganz entschieden überlegen ist, und zwar sowohl was die Bequemlichkeit der Messung anbetrifft, als, was schwerwiegender ist, was die Zuverlässigkeit und Genauigkeit der Meßresultate anbelangt.

So kam ich dazu, zur magnetischen Ausmessung meiner Versuchsobjekte eine Nullmethode zu wählen, die mit ihren Einzelheiten in folgendem dargelegt werden soll (Fig. 4).

Als Magnetometer wird eine Tangentenbussole  $T$  benutzt, welche einen Magnetring  $m$  und einen drehbaren Spiegel  $p$  besitzt. Auf einem  $\perp$  zum Meridian stehenden Balken ruhen, zu beiden Seiten des Magnetometers, verschiebbar angeordnet, zwei Spulen: die Magnetisierungsspule  $A$  und die Kompensationsspule  $B$ . Diese beiden Spulen sind so aufgestellt, daß sie eine gemeinschaftliche geometrische Achse haben ( $c-d$ ),

die durch den Mittelpunkt des ringförmigen Magneten  $m$  geht, horizontal verläuft und senkrecht zum magnetischen Meridian steht. Bevor der zu untersuchende Eisenstab  $q$  in die Spule  $A$  hineingeschoben wird, verstellt man Spule  $B$  längs der Achse  $c-d$  so lange, bis ein magnetisierender Strom  $i$  keine, oder doch nur eine kleine Ablenkung der Magnetometernadel hervorruft. Das feine Kompensieren erfolgt dann mittels des verschiebbaren Stromkreises  $k$ , welcher in der Ebene des magnetischen Meridians liegt und dessen Zentrum in die Achse  $c-d$  fällt.

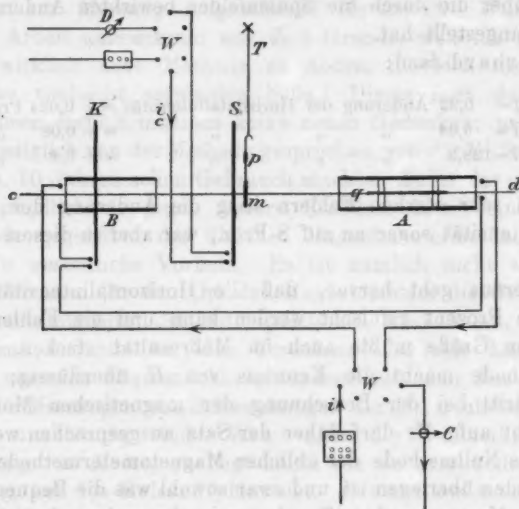


Fig. 4.

Hierdurch gelingt es, die Kompensierung in äußerst feiner Weise durchzuführen. Nun wird das Versuchsobjekt  $q$  in die Spule  $A$  eingeführt und die axiale Lage desselben in der üblichen Weise fixiert. Durch die Fernwirkung der Pole des magnetisierten Eisenstabes wird die Magnetnadel aus der Ebene des Meridians hinausgedreht und die Größe dieses Ablenkungswinkels ist es, woraus man bei der üblichen Magnetometermethode das magnetische Moment ermittelt. Ich schlug indessen folgendes Verfahren ein: Betrachten wir eine Windung  $S$  der Tangentenbusssole (Magnetometer)  $T$ , die so aufgestellt sein möge, daß

ihre Ebene in den magnetischen Meridian fällt. Es wird nun möglich sein, durch diese Windung einen Strom  $i_c$  von solcher Stärke und Richtung zu senden, daß die abgelenkte Magnetnadel gerade wieder in den Meridian zurückkehrt, d. h. es wird durch dieses Verfahren möglich sein, die Magnetometerausschläge zu kompensieren.

In folgendem soll der Zusammenhang erläutert werden zwischen Kompensationsstrom  $i_c$  und magnetischem Moment  $M_1$  pro Volumeneinheit (Fig. 5):

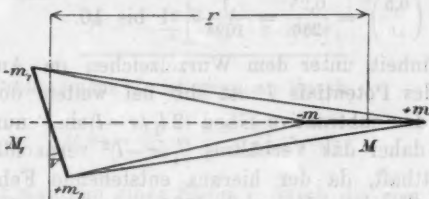


Fig. 5.

Die magnetischen Momente seien:

$$M_1 = 2 l_1 m_1,$$

$$M = 2 l m.$$

Zur Berechnung des Drehmomentes soll die Potentialfunktion aufgestellt werden. Es ist:

$$P = \frac{(1) \quad -m \cdot m_1}{\sqrt{(r-l)^2 + l_1^2 - 2 l_1 (r-l) \sin \nu}} + \frac{(2) \quad m \cdot m_1}{\sqrt{(r-l)^2 + l_1^2 + 2 l_1 (r-l) \sin \nu}} + \frac{(3) \quad m \cdot m_1}{\sqrt{(r+l)^2 + l_1^2 - 2 l_1 (r+l) \sin \nu}} - \frac{(4) \quad m \cdot m_1}{\sqrt{(r+l)^2 + l_1^2 + 2 l_1 (r+l) \sin \nu}}.$$

Das erste Glied dieses Summenausdruckes (1) läßt sich schreiben in der Form:

$$\frac{-m \cdot m_1}{\sqrt{(r-l)^2 + l_1^2 - 2 l_1 (r-l) \sin \nu}} = \frac{-m \cdot m_1}{(r-l) \sqrt{1 + \left(\frac{l_1}{r-l}\right)^2 - 2 \frac{l_1}{r-l} \sin \nu}}.$$

Der bewegliche Magnet ist ein kleiner Ringmagnet, bei welchem der Polabstand  $2 l_1$  ca. 1 cm beträgt. Für die Größen  $r+l$  wären einzuführen die Werte

$$\begin{array}{ll}
 r = \text{ca. } 45 \text{ cm} & \left. \begin{array}{l} \text{für die Versuchsobjekte} \\ I, II, III \text{ und } A. \end{array} \right\} \\
 l = \text{ca. } 14 \text{ cm} & \\
 r = \text{ca. } 30 \text{ cm} & \left. \begin{array}{l} \text{für die Versuchsobjekte} \\ 1-10. \end{array} \right\} \\
 l = \text{ca. } 14 \text{ cm} &
 \end{array}$$

Das Verhältnis  $(l_1/r-l)^2$  nimmt daher Werte von folgender Größenordnung an:

$$\left(\frac{0,5}{31}\right)^2 = \frac{0,25}{960} = \frac{1}{3840} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} I, II, III \text{ und } A.$$

$$\left(\frac{0,5}{16}\right)^2 = \frac{0,25}{256} = \frac{1}{1024} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1 \text{ bis } 10.$$

Die Einheit unter dem Wurzelzeichen im Ausdruck für Glied (1) des Potentials  $P$  ist die bei weitem dominierende Größe, da das subtraktive Glied  $(2l_1/r-l)\sin\varphi$  nur klein ist. Wenn wir daher das Verhältnis  $(l_1/r-l)^2$  vernachlässigen, so ist das statthaft, da der hieraus entstehende Fehler kleiner als 1 Promille ist. Demnach läßt sich Glied (1) die Form geben:

$$(1) = \frac{-m \cdot m_1}{(r-l) \sqrt{1 - \frac{2l_1}{r-l} \sin\varphi}}$$

oder entwickelt:

$$= \frac{-m \cdot m_1}{(r-l) \left\{1 - \frac{l_1}{r-l} \sin\varphi\right\}} = \frac{-m \cdot m_1}{r-l} \left\{1 + \frac{l_1}{r-l} \sin\varphi\right\}.$$

Es kann nun sofort übersehen werden, wie die ähnlich umgeformten Glieder (2), (3) und (4) beschaffen sind. Man erhält

$$(2) = \frac{m \cdot m_1}{r-l} \left\{1 - \frac{l_1}{r-l} \sin\varphi\right\},$$

daher:

$$(1) + (2) = \frac{-2m \cdot m_1}{(r-l)^2} l_1 \sin\varphi.$$

Ferner ist:

$$(3) = \frac{m \cdot m_1}{r+l} \left\{1 + \frac{l_1}{r+l} \sin\varphi\right\}$$

und

$$(4) = \frac{-m \cdot m_1}{r+l} \left\{1 - \frac{l_1}{r+l} \sin\varphi\right\},$$

also:

$$(3) + (4) = \frac{2m \cdot m_1}{(r+l)^2} l_1 \sin\varphi.$$

Und das Potential  $P$  ist somit:

$$P = -2m \cdot m_1 l_1 \sin v \left\{ \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right\}$$

$$= -2m \cdot m_1 l_1 \sin v \cdot \frac{4rl}{(r^2-l^2)^2}$$

Da nun aber:

$$2lm = M$$

und

$$2l_1 m_1 = M_1$$

ist, so hat man:

$$P = \frac{-2M \cdot M_1}{(r^2-l^2)^2} r \cdot \sin v.$$

Das Drehmoment  $D$  ist gegeben durch

$$D = -\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{2M \cdot M_1}{(r^2-l^2)^2} r \cdot \cos v.$$

Schickt man nun einen Strom  $i_c$  durch die eine Windung  $S$  der ( $T$  der) Tangentenbussole  $T$ , so läßt sich das nun entstehende Drehmoment herleiten wie folgt (Fig. 6):

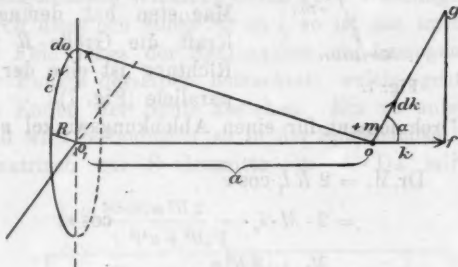


Fig. 6.

Ein Element des Kreisstromes  $ds$  übt auf die magnetische Masse  $+m$  eine Kraft  $dk$  aus, welche gegeben ist durch:

$$dk = \frac{m \cdot i_c \cdot ds}{r^2}$$

und die Komponente dieser Elementarkraft nach der Richtung  $\alpha$  ist:

$$dk \cos \alpha = \frac{m \cdot i_c \cdot ds}{r^2} \cos \alpha.$$

Welches Element des Stromkreises wir auch wählen, immer hat die Kraftkomponente nach der Richtung  $a$  die obige Form; daher ist:

$$\begin{aligned}\int d k \cos \alpha &= K = \frac{m \cdot i_c}{\varrho^3} \cos \alpha \cdot \int_0^{2\pi} ds \\ &= \frac{m \cdot i_c}{\varrho^3} \cdot 2 R \pi \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{of}{og} = \frac{R}{\varrho}, \\ R &= \frac{m \cdot i_c \cdot 2 R^2 \pi}{\varrho^3} = \frac{m \cdot i_c \cdot 2 R^2 \pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}.\end{aligned}$$

Wir machen nun die Annahme, der Ringmagnet sei so klein, daß er als ganz in der Achse  $a$  liegend gedacht werden kann; dann wird die auf die

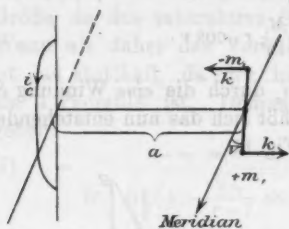


Fig. 7.

Pole des abgelenkten Magneten ausgeübte Kraft der Größe und Richtung nach durch die Ablenkung nicht verändert. In jeder beliebigen Stellung des Magneten hat demnach diese Kraft die Größe  $R$  und ihre Richtung ist eine der Achse  $a$  parallele (Fig. 7).

Das Drehmoment für einen Ablenkungswinkel  $\nu$  hat also die Form:

$$\begin{aligned}\text{Dr.M.} &= 2 R l_1 \cos \nu \\ &= 2 \cdot M \cdot i_c \cdot \frac{2 R^2 \pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \cos \nu, \\ &= \frac{M_1 \cdot i_c \cdot 2 R^2 \pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \cos \nu.\end{aligned}$$

Ist der Magnetometerausschlag durch passende Wahl des Stromes  $i_c$  kompensiert, so müssen diese beiden aufgestellten Drehmomente einander gleich sein.

$$\begin{aligned}\frac{M_1 \cdot i_c \cdot 2 R^2 \pi \cdot \cos \nu}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} &= \frac{2 M \cdot M_1}{(r^2 - l^2)^2} r \cdot \cos \nu, \\ i_c \cdot \frac{R^2 \cdot \pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} &= \frac{M}{(r^2 - l^2)^2} r, \\ M &= \frac{R^2 \pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \frac{(r^2 - l^2)^2}{r} i_c.\end{aligned}$$

Das magnetische Moment der Volumeneinheit hat also die Form:

$$M_1 = \frac{R^2 \pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \cdot \frac{(r^2 - l^2)^2}{r} \cdot \frac{1}{\text{Vol.}} \cdot \frac{1}{10} \cdot i_c^{\text{exp.}}$$

Setzen wir:

$$\frac{R^2 \pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \cdot \frac{(r^2 - l^2)^2}{r} \cdot \frac{1}{\text{Vol.}} \cdot \frac{1}{10} = \text{Konst.},$$

so ist:

$$M_1 = \text{Konst. } i_c.$$

Die Abszissen der Magnetisierungskurven, die Feldstärke  $H$  wurde erzeugt mittels einer Spule von folgenden Dimensionen (Fig. 8):

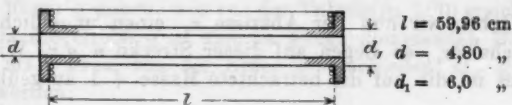


Fig. 8.

und die angebrachte Wicklung besaß 1177 Windungen. Schickt man durch dieselben einen Strom  $i$ , so ist das im Innern entstehende Feld längs der Spulenachse ein homogenes, sofern man nur Punkte derselben betrachtet, welche genügend weit von den Enden der Spule abstehen. Ein zu untersuchender Eisenstab wird bekanntlich so in der Spulenachse fixiert, daß er symmetrisch zur Spulenmitte ist. — Da mir nun nur

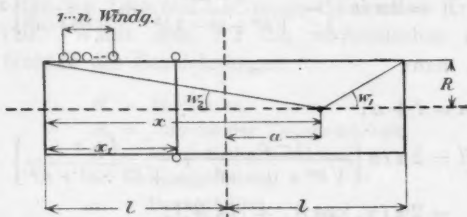


Fig. 9.

Solenoiden von den erwähnten Dimensionen zur Verfügung standen, so mußte nachgesehen werden, welche maximale Länge den Versuchsobjekten gegeben werden durfte, damit

sie bei der Magnetisierung ihrer ganzen Länge nach im homogenen Felde stecken. Eine kleine Überlegung gibt über diese Frage Aufschluß (Fig. 9).

Ein Solenoid von der Länge  $2l$  und dem Radius  $R$  sei gegeben. Die Wicklung sei so beschaffen, daß auf die Längeneinheit  $n$  Windungen entfallen. Auf der Spulenachse im Abstände  $x$  befinde sich eine magnetische Masse  $+1$ , so ist die Kraft, welche von einer den Strom  $i$  führenden Windung im Abstände  $x_1$  auf dieselbe ausgeübt wird, in Richtung der Achse wirksam und hat die Größe:

$$X = \frac{2R^2 \pi \cdot i}{\{R^2 + (x - x_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Geben wir nun der Abszisse  $x_1$  einen unendlich kleinen Zuwachs  $dx_1$ , so liegen auf dieser Strecke  $n \cdot dx_1$  Windungen und es ist die auf die betrachtete Masse  $+1$  ausgeübte Kraft

$$dH = \frac{2R^2 \pi i n \cdot dx_1}{\{R^2 + (x - x_1)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$H = 2R^2 \pi i n \int_{n_1=0}^{n_1=2l} \frac{dx_1}{\{R^2 + (x - x_1)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$H = 2\pi i R^2 n \cdot \left\{ -\frac{1}{R^2} \frac{n - n_1}{\sqrt{R^2 + (x - x_1)^2}} \right\}^{2l}$$

$$= 2\pi i n \cdot \left\{ -\frac{x - 2l}{\sqrt{R^2 + (x - 2l)^2}} + \frac{x}{\sqrt{R^2 + (x)^2}} \right\}.$$

Setzt man:

$$n = l + a,$$

$$H = 2\pi i n \left\{ \frac{l - a}{\sqrt{R^2 + (l - a)^2}} + \frac{l + a}{\sqrt{R^2 + (l + a)^2}} \right\}$$

$$= 2\pi i n \cdot \{\cos W_1 + \cos W_2\}.$$

Bei der verwendeten Spule ist nun

$$l = 30 \text{ cm},$$

$$R = 3,0 \text{ cm}.$$



Bezeichnet man die Klammergröße mit  $y$ , so nimmt sie folgende Werte an:

für $a = 0$	$y = 1,990$
$= 5 \text{ cm}$	$= 1,989$
$= 10 \text{ „}$	$= 1,986$
$= 15 \text{ „}$	$= 1,978$
$= 20 \text{ „}$	$= 1,953$
$= 25 \text{ „}$	$= 1,855$
$= 30 \text{ „}$	$= 0,999$

Wenn man eine Änderung der Feldstärke von ca. 0,5 Proz. zuläßt, so ist man auf das Intervall  $a = \pm 15 \text{ cm}$  angewiesen. Allen meinen Versuchsobjekten habe ich daher eine Länge von ca. 30 cm gegeben, wie aus der Tabelle (p. 590) ersichtlich ist. — Da die Größe  $y$  in dem in Frage kommenden Bereich weniger als 1 Proz. von der Ziffer 2 verschieden ist, so darf gesetzt werden:

$$H = 4\pi i M$$

$$= 4\pi \cdot i \cdot \frac{1177}{59,96} = 24,65 \cdot i_{\text{amp.}}$$

#### Die Versuchsergebnisse.

##### A. Die Permeabilität.

Der Verlauf der Permeabilitätskurve des elektrolytischen Eisens wurde für die Versuchsobjekte I, II und III bestimmt, und zwar für ein Intervall der magnetisierenden Kraft von 0 bis ca. 120. Wählt man für die magnetischen und elektrischen Größen die Bezeichnungen:

- $H$  = Feldstärke,
- $M_1$  = Moment der Volumeneinheit,
- $B$  = Magnetische Induktion,
- $R$  = Suszeptibilität,
- $\mu$  = Permeabilität,
- $i_m$  = Magnetisierender Strom,
- $i_s$  = Kompensationsstrom,

so können die gewonnenen Versuchsergebnisse in folgender Form gegeben werden:

Stab I.

$i_m$	$H$	$i_c$	$M_1$	$K$	$B$	$\mu$
0,100 *	2,46	0,00080 *	24,8	10,1	314	127
0,190	4,70	0,00207	64,3	13,7	812	172
0,289	7,10	0,00334	104	14,6	1313	184
0,392	9,67	0,00466	145	14,9	1831	189
0,503	12,3	0,00630	196	15,9	2474	201
0,624	15,3	0,00836	260	16,9	3281	214
0,816	20,1	0,01092	340	16,9	4290	213
0,970	23,9	0,01384	430	17,9	5425	222
1,136	27,9	0,01625	505	18,1	6371	228
1,303	32,0	0,01865	580	18,1	7317	228
1,457	35,8	0,0209	650	18,1	8200	229
1,610	39,6	0,0224	697	17,6	8794	223
1,79	43,9	0,0241	750	17,0	9464	215
1,97	48,3	0,0256	796	16,4	10046	208
2,14	52,7	0,0263	818	15,5	10327	195
2,62	64,6	0,0300	933	14,4	11783	182
3,08	76,0	0,0326	1014	13,3	12812	168
3,55	87,5	0,0350	1094	12,5	13828	158
3,93	97,1	0,0370	1150	11,8	14541	149
4,43	109,4	0,0388	1207	11,0	15269	139
4,82	118,7	0,0398	1238	10,4	15668	132

Daten:  $\left\{ \begin{array}{l} l = 14,16 \text{ cm,} \\ r = 44,92 \text{ ,,} \\ R = 19,95 \text{ ,,} \\ a = 2,4 \text{ ,,} \\ \text{Masse} = 0,2856 \text{ g,} \\ \text{Vol.} = 0,03642 \text{ cm}^3, \\ M_1 = 31095 \cdot i_c. \end{array} \right.$

Die Größen  $M_1$  und  $K$ , in Funktion der magnetisierenden Kraft  $H$  aufgetragen, liefern die Kurven in Fig. 10.

Ich stehe davon ab, auch die Versuchsergebnisse der Niederschläge II und III hier in ausführlicher Weise wiederzugeben und begnüge mich mit der Bemerkung, daß die Abweichungen der drei gewonnenen Magnetisierungskurven untereinander so

unwesentlich sind, daß sie sich fast vollkommen decken. Entnimmt man nämlich allen drei Kurven für einige runde Werte

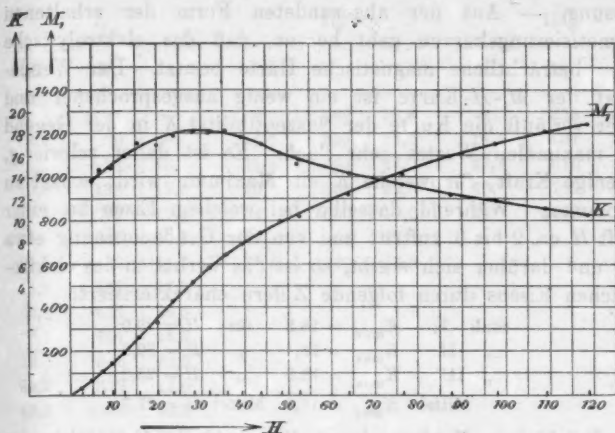


Fig. 10.

von  $H$  die Momente  $M_1$ , so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

$H$	Stab I $M_1$	Stab II $M_1$	Stab III $M_1$
5	64	78	68
10	151	162	153
15	246	254	250
20	345	351	353
25	450	454	453
30	546	555	543
35	633	640	622
40	703	707	693
50	815	809	810
60	902	892	900
70	975	972	973
80	1047	1046	1045
90	1111	1110	1112
100	1167	1163	1162
110	1211	1210	1207
120	1250	1246	1240

Diese befriedigende Übereinstimmung der Resultate dürfte eine Gewähr bieten für die Sicherheit und Zuverlässigkeit der Messung. — Aus der abgerundeten Form der erhaltenen Magnetisierungskurven geht hervor, daß das elektrolytische Eisen beträchtliche magnetische Härte besitzt. Der Wendepunkt der  $M_1$ - $H$ -Kurve ist ein wenig ausgesprochener und daher verläuft die Kurve der Suszeptibilität  $K$  in der Gegend des maximalen Wertes sehr flach. Es ist daher schwierig, diejenige Kraft, für welche  $K$  ein Maximum wird, scharf zu bekommen. Während dasselbe bei weichem Eisen bei einer Kraft  $H$  ca. 2 bis 3 auftritt und von der Größenordnung etwa 200 und darüber sich ergibt, so ist das Verhalten des elektrolytischen Eisens durch folgende Ziffern charakterisiert:

Stab I:	$K_{\max.} = 18,2$	für	$H = 28,0$
„ II:	$K_{\max.} = 18,4$	„	$H = 30,0$
„ III:	$K_{\max.} = 18,3$	„	$H = 25,0$
Mittel	$K_{\max.} = 18,3$	Mittel	$H = 27,7$

Bei kleinen Kräften nimmt die spezifische Magnetisierung nur geringe Werte an. Es verhält sich im Intervall  $H=0$  bis  $H$  ca. 15 das elektrolytische Eisen ähnlich wie das reine Kobalt, welches nach Ewing und Rowland eine bei  $H = \text{ca. } 25$  auftretende maximale Magnetisierungsfunktion von  $K = \text{ca. } 15$  aufweist. Für größere Kräfte indessen ist das Verhalten dieser beiden Metalle ein völlig verschiedenes, indem bei ganz großen Kräften dem elektrolytischen Eisen Induktionen von ähnlicher Höhe, wie sie weiches Schmiedeeisen aufweist, erteilt werden können, während Kobalt bei  $B = \text{ca. } 10000$  schon nahezu magnetisch gesättigt ist.

Die durch die Leickschen Versuche<sup>1)</sup> gelieferten Magnetisierungskurven für elektrolytische Eisenniederschläge weichen beträchtlich von meinen Resultaten ab, und es soll versucht werden, die Ursachen der Differenzen aufzudecken und zu beleuchten. Leick führte in seiner Arbeit unter anderen auch drei Versuchsobjekte an, die mit  $I_0$ ,  $II_0$ ,  $III_0$  bezeichnet werden mögen und welche die Massen besitzen:

$I_0$ :	$M = 0,004 \text{ g}$
$II_0$ :	$M = 0,016 \text{ „}$
$III_0$ :	$M = 0,060 \text{ „}$

1) W. Leick, Wied. Ann. 58. p. 691. 1896.

Die Versuchsergebnisse dieser drei Niederschläge sind in folgenden Tabellen enthalten:

I <sub>0</sub>			II <sub>0</sub>			III <sub>0</sub>		
H	M <sub>1</sub>	K	H	M <sub>1</sub>	K	H	M <sub>1</sub>	K
0	-94	—	9	149	16,6	9	223	24,8
3,6	0	—	14,4	335	23,8	14,4	361	25,2
7,2	+94	13	23,4	623	27,0	23,4	670	28,6
10,8	188	17,4	36	806	22,3	36	797	22,1
14,4	282	19,6	54	1060	19,6	54	1040	19,3
18	366	20,3	63	1190	17,3			
21,6	469	21,7	75,6	1320	17,5			
25,2	562	22,3						
28,8	677	23,5						
32,4	761	23,5						
36	846	23,5						
39,9	912	23,0						
46,8	1043	22,3						
54	1156	21,4						
72	1363	18,9						
90	1500	16,7						

Die drei Niederschläge I<sub>0</sub>, II<sub>0</sub>, III<sub>0</sub> hat Leick unter genau gleichen Bedingungen sich bilden lassen und es muß daher auffallen, daß ihre Kurven so beträchtlich voneinander verschieden sind. Um die Differenzen bequem übersehen zu können, ist es zweckmäßig, den Kurven für einige gleiche Werte von *H* die Ordinaten zu entnehmen. Dann ergibt sich:

H	I <sub>0</sub> M <sub>1</sub>	II <sub>0</sub> M <sub>1</sub>	III <sub>0</sub> M <sub>1</sub>	I M <sub>1</sub>
5	42	—	—	64
10	164	176	246	151
15	292	330	376	246
20	420	484	498	345
25	555	606	603	450
30	702	705	700	546
35	824	790	780	633
40	921	867	853	703
50	1070	1005	988	815
60	1196	1131	—	902
70	1313	1252	—	975
80	1412	—	—	1047
90	1500	—	—	1111

In Kolonne I sind die Resultate, die mein Versuchsobjekt I lieferte, enthalten. Man erkennt, daß diese Werte durchwegs bedeutend kleiner sind, als die Leickschen. Das wäre nun wohl erklärlich, denn Leick stellte seine Niederschläge unter Bedingungen her, die mit den meinen nicht identisch sind. Er verwendete als Anoden nicht Platin, sondern Stäbe aus „reinstem“ Eisen und zudem gewann er die Niederschläge  $I_0$ ,  $II_0$  und  $III_0$  nicht aus einer Lösung von Ferroammoniumoxalat, sondern aus Ferrosulfat. Wie Leick selber festgestellt hat, ist der Einfluß der Natur der Flüssigkeit auf das magnetische Verhalten des ausgeschiedenen Eisens kein nennenswerter. Die Ursache der Differenzen müßte demnach mit der Verwendung von Eisenanoden zusammenhängen. Da nun aber die Leickschen Resultate unter sich beträchtliche Verschiedenheiten zeigen, so ist es vielleicht doch fraglich, ob die Eisenanode tatsächlich eine so große Rolle spielt. Denn jener Umstand dürfte vielleicht darauf hinweisen, daß eine gewisse Unsicherheit in den Leickschen Resultaten steckt. Zu dieser Vermutung könnte man auch etwa durch folgende Erwägungen noch gelangen:

Nach den Angaben von Leick sind die Massen seiner Stäbe:

$I_0$ :	$M = 0,004$ g
$II_0$ :	$M = 0,016$ „
$III_0$ :	$M = 0,060$ „

Ein jeder Fehler in der Massenbestimmung beeinflußt in proportionaler Weise das Resultat. In diesen Angaben sind nun aber möglich die Fehler:

$I_0$ :	ca. 18 Proz.
$II_0$ :	ca. 6 „
$III_0$ :	ca. 1,5 „

Wohl darf nun angenommen werden, daß diese Fehler nicht bestehen und daß obige Ziffern die wahren Massen sind. Es ist aber auffallend, daß dieselben, um jeden Zweifel zu beseitigen, nicht präziser gegeben werden.

Weiterhin benutzte Leick zur Ausmessung seiner Stäbe das übliche magnetometrische Verfahren, welches aber nach Erhard, wie früher erwähnt wurde, mit einem Fehler behaftet ist, der bis ca. 8 Proz. heranreichen kann.

In Anbetracht dieser Erwägungen erachtete ich es als von Interesse, einen Eisenniederschlag auf seine magnetischen Eigenschaften zu untersuchen, der unter genau Leickschen Bedingungen gebildet wurde. Dieser Niederschlag ist in der Tabelle (p. 590) mit der Marke *A* angeführt und seine Ausmessung ergab folgendes Resultat:

$i_m$	$H$	$i_c$	$M_1$	$K$	$B$	$\mu$
0,176 *	4,33	0,00706 *	33	7,6	419	96,7
0,338	8,33	0,0200	93	10,2	1176	141
0,443	11,0	0,0305	142	12,9	1795	163
0,525	13,0	0,0380	177	13,6	2236	172
0,649	16,1	0,0510	238	14,7	3006	186
0,849	20,9	0,0740	345	16,3	4353	207
0,997	24,5	0,0910	425	17,2	5362	218
1,164	28,6	0,1115	521	18,2	6572	229
1,328	32,6	0,1285	600	18,4	7569	232
1,490	35,2	0,1383	645	18,3	8136	231
1,624	40,0	0,1544	720	17,9	9083	227
1,974	48,8	0,1785	833	17,0	10511	215
2,337	57,5	0,1972	920	16,0	11613	201
2,765	68,1	0,2160	1008	14,7	12728	185
3,125	77,2	0,2277	1062	13,7	13415	173
3,490	86,0	0,2385	1112	12,9	14153	163
4,101	101,0	0,2535	1182	11,7	14946	147
4,48	110,5	0,2650	1236	11,1	15634	141

Daten:  $\left\{ \begin{array}{l} r = 55,60 \text{ cm,} \\ l = 14,33 \text{ "} \\ R = 19,95 \text{ "} \\ a = 2,40 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Masse} = 3,8793 \text{ g,} \\ \text{Vol.} = 0,4948 \text{ cm}^3, \\ M = 4663 \cdot i_c. \end{array}$

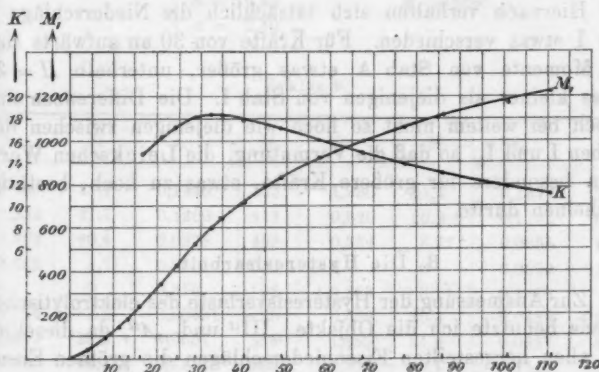


Fig. 11.

Diese Ergebnisse liefern als graphischen Ausdruck die vorstehenden Kurven (Fig. 11).

Es sollen nun diese an Stab *A* gewonnenen Resultate verglichen werden einmal mit den Leickschen, und dann auch mit den vom reinen Eisen der Stäbe I, II, III gelieferten Werten. Über ihr gegenseitiges Verhältnis gibt folgende Tabelle Aufschluß:

<i>H</i>	$I_0$ $M_1$	<i>I</i> $M_1$	<i>A</i> $M_1$
5	42	64	41
10	164	151	122
15	292	246	216
20	420	345	321
25	555	450	435
30	702	546	551
35	824	633	643
40	921	703	720
50	1070	815	848
60	1196	902	943
70	1313	975	1017
80	1412	1047	1030
90	1500	1111	1132
100		1167	1180

Hiernach verhalten sich tatsächlich die Niederschläge *A* und *I* etwas verschieden. Für Kräfte von 30 an aufwärts sind die Momente von Stab *A* etwas größer, unterhalb  $H = 30$  etwas kleiner als diejenigen von Stab *I*. Die Differenzen sind jedoch bei weitem nicht so hoch wie diejenigen zwischen den Stäben *I* und  $I_0$ , so daß die Vermutung, die Leickschen Werte seien besonders für größere Kräfte, etwas zu hoch, bestätigt erscheinen dürfte.

#### B. Die Hysteresisarbeit.

Zur Ausmessung der Hysteresisverluste des elektrolytischen Eisens benutzte ich die Objekte „III“ und „A“, da dieselben von allen hergestellten Eisenniederschlägen die größten Eisenmassen besitzen. „Stab III“ ergab folgende Resultate:



Zyklus 1.

Zyklus 2.

$i_m$	$H$	$i_c$	$M_1$	$i_m$	$H$	$i_c$	$M_1$
0,998*	24,60	0,1062*	540	1,480*	36,5	0,1360*	698
0,760	18,7	0,0946	482	1,018	25,1	0,1166	594
0,450	11,1	0,0776	395	0,730	18,0	0,1034	527
0,146	3,60	0,0556	283	0,486	12,0	0,0874	445
0	0	0,0417	212	0,1014	2,50	0,0569	290
-0,145	-3,57	0,0266	135	0	0	0,0475	242
0,450	11,1	-0,00941	-48	-0,1010	-2,49	0,0372	190
0,758	18,7	0,04375	223	0,487	12,0	-0,01155	-59
0,996	24,5	0,0686	350	0,734	18,2	0,04337	221
0,758	18,7	0,0596	304	1,020	25,1	0,0733	374
0,450	11,1	0,0420	214	1,480	36,5	0,1145	583
6,145	8,57	0,0192	98	1,020	25,1	0,0965	492
0	0	0,00568	29	0,734	18,2	0,08204	418
+0,146	+3,60	+0,00824	+42	0,487	12,0	0,0670	341
0,450	11,10	0,0448	229	0,1010	2,49	0,0365	186
0,760	18,75	0,0794	405	0	0	0,02765	141
0,999	24,6	0,1072	545	+0,1014	+2,50	0,01650	84
				0,486	12,0	+0,03373	172
				0,730	18,0	0,06516	332
				1,018	25,1	0,09405	480
				1,480	36,5	0,1366	697

Daten:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 44,83 \text{ cm,} \\ l = 13,93 \text{ „} \\ R = 19,45 \text{ „} \\ a = 2,40 \text{ „} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Masse} = 1,7433 \text{ g,} \\ \text{Vol.} = 0,2223 \text{ cm}^3, \\ M_1 = 5095 \cdot i_c. \end{array}$$

Zyklus 3.

$i_m$	$H$	$i_c$	$M_1$	$i_m$	$H$	$i_c$	$M_1$
1,950	48,1	0,1448*	738	1,280	31,4	0,1377*	703
1,285	31,7	0,1200	611	0,820	20,2	0,1166	595
0,829	20,4	0,0978	498	0,354	8,72	0,0865	441
0,358	8,71	0,0691	352	0	0	0,0569	290
0	0	0,376	192	+0,358	+8,71	0,1176	60
+0,354	-8,72	-0,00491	-25	0,829	20,4	+0,0488	+249
0,820	20,2	0,0657	335	1,285	31,6	0,0927	478
1,280	31,4	0,1153	589	1,950	48,1	0,1445	737
1,945	47,9	0,1615	825				

Zyklus 4.

$i_m$	$H$	$i_s$	$M_1$
3,240 <sup>a</sup>	79,9	0,1880 <sup>a</sup>	958
2,085	51,4	0,1605	818
1,220	30,1	0,1233	629
0,519	12,8	0,0822	419
0	0	0,0487	229
-0,520	-12,8	-0,01196	-61
1,215	29,9	0,1013	517
2,075	51,1	0,1710	871
3,240	79,9	0,2195	1121
2,070	51,0	0,1914	976
1,215	29,9	0,1560	796
0,520	12,8	0,1160	591
0	0	0,0771	393
+0,517	+12,7	0,02075	106
1,220	30,1	+0,0606	+309
2,090	51,5	0,1347	687
3,240	79,9	0,1864	949

Zyklus 5.

$i_m$	$H$	$i_s$	$M_1$
5,02 <sup>a</sup>	123,7	0,2420 <sup>a</sup>	1233
3,96	97,6	0,2245	1144
2,66	65,6	0,1914	975
1,94	48,0	0,1707	870
1,260	31,0	0,1393	710
0,400	9,84	0,0917	467
-0,400	-9,84	0,02845	145
1,260	31,0	-0,0785	-400
1,97	48,2	0,1354	690
2,67	65,8	0,1805	920
3,98	98,1	0,2300	1172
5,03	124,0	0,2485	1268
3,97	97,8	0,2350	1197
2,66	65,6	0,201	1025
1,95	48,2	0,1821	928
1,250	30,7	0,1512	770
0,400	9,84	0,1040	530
+0,400	+9,84	0,0411	210
1,260	31,0	+0,0667	+340
1,97	48,0	0,1267	646
2,67	65,8	0,1688	860
3,97	97,8	0,2160	1100
5,03	124,0	0,2414	1230

Die Ausmessung der Flächen der Hysteresisschleifen ergibt:

Zyklus	$H_{\max}$	$M_1 \max$	$B_{\max}$	$A_H$
1	24,6	446	5627	7442 Erg
2	36,5	639	8062	19600
3	48,1	781	9857	21800
4	79,9	1087	13105	40000
5	123,8	1246	15773	56900

Bei magnetisierenden Kräften von der Größe  $H = \text{ca. } 120$  steigt die Magnetisierungskurve elektrolytischer Eisenniederschläge immer noch verhältnismäßig steil an. Der magnetische Sättigungszustand ist daher bei Kräften, solcher Größe offenbar noch lange nicht erreicht. Die Hysteresisverluste,

bezogen auf 1 Zyklus und die Volumeneinheit, werden daher für einen Zustand, welcher der Sättigung nahe ist, Werte annehmen, die vermutlich weit über 57000 Erg liegen. Demnach verhält sich elektrolytisches Eisen bezüglich der Hysteresisverluste ähnlich wie harter Stahl.

Nachfolgende Kurve (Fig. 12) gibt die Abhängigkeit der Verluste von der maximalen Induktion:

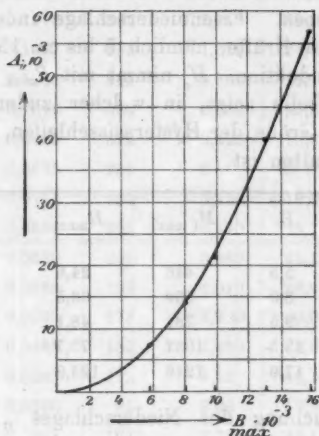


Fig. 12.

Entnimmt man für einige runde Werte der Induktion die Verluste  $A_H$ , so findet man:

$B_{\max.}$	$A_H$	$\frac{A_H}{(B_{\max.})^2}$
4000	3600 Erg	$0,225 \times 10^{-3}$
6000	8100	0,225 "
8000	14100	0,220 "
10000	22900	0,223 "
12000	33000	0,228 "
14000	45000	0,229 "
16000	58000	0,229 "

$$\text{Mittel: } \frac{A_H}{(B_{\max.})^2} = 0,2256 \cdot 10^{-3}.$$

Die Verhältnisse  $A_{II}/(B_{\max})^2$  sind fast konstant und es läßt sich daher die vorige Kurve durch die Form ausdrücken.

$$A_{II} = 0,0002256 B_{\max}^2.$$

Aus den Hysteresisschleifen geht weiterhin hervor, daß elektrolytisches Eisen sehr beträchtliche Koerzitivkraft ( $H_c$ ) besitzt. Weiches Eisen verlangt höchstens eine Kraft von 1—3 Einh., um ein remanentes Moment beliebiger Höhe vollkommen aufzuheben. Eisenniederschläge indessen erfordern hierzu viel größere Kräfte, nämlich 5 bis ca. 15 Einh., je nach der Größe der Induktion.  $H_c$  nimmt mit  $B_{\max}$  fast linear zu, wie folgende Tabelle zeigt, in welcher zudem eine weitere charakteristische Größe der Hysteresisschleifen, das remanente Moment  $M_r$  enthalten ist.

Zyklus	$H_c$	$M_{I \max}$	$H_{\max}$	$M_r$
1	5,5	446	24,6	122
2	8,0	639	36,5	190
3	9,5	781	48,1	240
4	13,5	1037	79,7	310
5	17,0	1246	123,8	365

Die Untersuchung des Niederschlages „A“ ergab die Resultate:

Zyklus 2.

$i_m$	$H$	$i_c$	$M_I$	$i_m$	$H$	$i_c$	$M_I$
1,267 *	31,2	0,1646 *	540	1,027 *	25,3	0,1660 *	545
1,025	25,3	0,1547	507	0,720	17,5	0,1523	500
0,720	17,5	0,1387	455	0,430	10,6	0,1410	430
0,430	10,6	0,1220	400	0,146	3,6	0,1005	330
0,142	3,5	0,0906	297	0	0	0,0807	265
0	0	0,0685	225	+0,142	+3,5	0,0532	175
-0,146	-3,6	0,0396	130	0,430	10,6	+0,0134	+44
0,435	10,7	-0,0198	-65	0,720	17,5	0,0700	230
0,720	17,5	0,0800	262	1,025	25,3	0,1227	403
1,027	25,3	0,1340	440	1,267	31,2	0,1660	545
1,267	31,2	0,1767	580				

$$\text{Daten: } \begin{cases} l = 14,33 \text{ cm,} \\ r = 50,00 \text{ „} \\ R = 19,95 \text{ „} \\ a = 2,40 \text{ „} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Masse} = 3,8793 \text{ g,} \\ \text{Vol.} = 0,4948 \text{ cm}^3, \\ M_I = 3278 \cdot i_c. \end{cases}$$

Zyklus 1.

$i_m$	$H$	$i_c$	$M_i$
0,473 <sup>a</sup>	11,6	0,1208 <sup>a</sup>	394
0,402	9,9	0,1170	384
0,334	8,2	0,1146	376
0,286	7,0	0,1112	365
0,243	6,0	0,1067	355
0,212	5,2	0,1084	345
0,166	4,1	0,1016	334
0,136	3,3	0,0985	323
0	0	0,0855	281
-0,136	-3,3	0,0714	234
0,166	4,1	0,0686	225
0,212	5,2	0,0630	206
0,245	6,0	0,0589	193
0,288	7,1	0,0533	175
0,337	8,3	0,0465	152
0,408	10,1	0,0363	119
0,481	11,8	0,0260	85
0,408	10,1	0,0308	101
0,339	8,3	0,0356	117
0,290	7,1	0,0397	131
0,246	6,0	0,0436	143
0,213	5,2	0,0461	151
0,166	4,1	0,0500	164
0,137	3,3	0,0533	175
0	0	0,0643	211
+0,137	3,3	0,0796	261
0,165	4,1	0,0820	269
0,212	5,2	0,0878	288
0,244	6,0	0,0916	301
0,287	7,0	0,0959	314
0,336	8,3	0,1016	334
0,402	9,9	0,1100	361
0,474	11,7	0,1195	393

Zyklus 3.

$i_m$	$H$	$i_c$	$M_i$
2,060 <sup>a</sup>	50,8	0,2600 <sup>a</sup>	852
1,760	43,4	0,2510	828
1,430	35,2	0,2384	782
1,210	29,8	0,2253	740
1,010	24,8	0,2105	691
0,860	21,1	0,2008	659
0,630	15,5	0,1801	592
0,420	10,3	0,1590	521
0	0	0,1073	352
-0,420	+10,3	0,0305	100
0,640	15,7	-0,0366	-121
0,860	21,1	0,1029	337
1,010	24,8	0,1397	453
1,220	30,0	0,1831	601
1,430	35,2	0,2171	712
1,76	43,4	0,2480	815
2,06	50,8	0,2694	884
1,75	43,1	0,2610	860
1,420	34,9	0,2509	823
1,210	29,8	0,2394	784
1,000	24,6	0,2274	746
0,860	21,1	0,2175	713
0,630	15,5	0,1996	655
0,420	10,3	0,1793	587
0	0	0,1247	410
+0,420	+10,3	0,0396	130
0,640	15,7	+0,0244	+ 80
0,870	21,4	0,0845	273
1,010	24,8	0,1204	395
1,220	30,0	0,1988	522
1,435	35,4	0,1984	650
1,76	43,4	0,2360	775
2,060	50,8	0,2584	848

## Zyklus 4.

$i_m$	$H$	$i_e$	$M_1$	$i_m$	$H$	$i_e$	$M_1$
4,08 <sup>a</sup>	100,6	0,3480 <sup>a</sup>	1140	3,66 <sup>a</sup>	90,0	0,365 <sup>a</sup>	1196
3,69	90,9	0,343	1125	3,16	77,8	0,356	1170
3,18	78,2	0,335	1100	2,79	68,6	0,348	1140
2,79	68,6	0,327	1074	2,05	50,5	0,318	1045
2,06	50,8	0,304	998	1,430	35,2	0,285	936
1,430	35,2	0,277	910	1,010	24,9	0,256	840
1,010	24,9	0,252	829	0,630	15,5	0,227	747
0,630	15,5	0,223	732	0,418	10,3	0,206	676
0,420	10,3	0,202	663	+ 0,420	+ 10,3	0,0730	239
- 0,420	- 10,3	0,0740	242	0,640	15,7	0,0110	36
0,640	15,7	0,0140	46	1,020	25,1	- 0,1000	+ 328
1,020	25,1	- 0,1000	- 328	1,445	35,4	0,1880	617
1,440	35,4	0,195	640	2,07	51,0	0,2610	857
2,07	51,0	0,274	900	2,81	69,2	0,302	991
2,81	69,2	0,323	1060	3,20	78,7	0,317	1042
3,18	78,2	0,338	1110	3,69	90,9	0,331	1087
3,67	90,3	0,356	1170	4,05	99,6	0,341	1120
4,04	99,3	0,369	1210				

Die Arbeitswerte der Flächen dieser vier Hysteresis-schleifen sind:

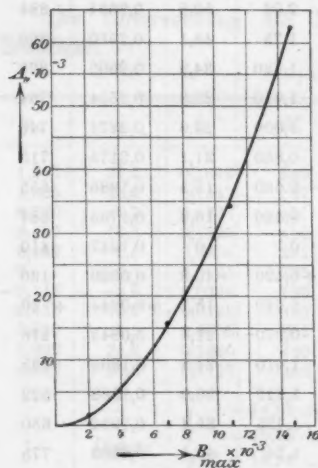


Fig. 13.

Zyklus	$H_{max.}$	$M_{1max.}$	$B_{max.}$	$A_{II}$
1	11,6	154	1945	1130
2	31,2	561	7077	16450
3	50,8	867	10940	34200
4	100,0	1165	14695	62500

$A_{II}$ , aufgetragen in Funktion von  $B_{max.}$  ergibt die Kurve (Fig. 13), deren Verlauf ein von dem für Stab III gefundenen etwas abweichender ist; sie läßt sich durch die Form darstellen:

$$A_{II} = 0,000606 (B_{max.})^{1,92}.$$

Stab A weist demnach wesentlich höhere Hysteresisverluste

auf als Stab III. Dieses Resultat wäre verständlich dann, wenn der Niederschlag *A* magnetisch härter ist als III. Hierüber geben aber Aufschluß: die Koerzitivkraft und die Lage des Wendepunktes der Magnetisierungskurven.

Die Koerzitivkraft für den Niederschlag *A* kann folgender Tabelle entnommen werden:

Zyklus	$H_c$	$M_{1\text{ max.}}$	$B_{\text{max.}}$	$M_c$
1	2,4	154	1945	37
2	8,4	561	7077	245
3	13,0	867	10940	383
4	17,0	1165	14695	490

Trägt man für die Stäbe *A* und III  $H_c$  in Funktion von  $B_{\text{max.}}$  auf, so zeigt sich, daß die Kurve „*A*“ durchwegs über der Kurve „III“ verläuft (Fig. 14).

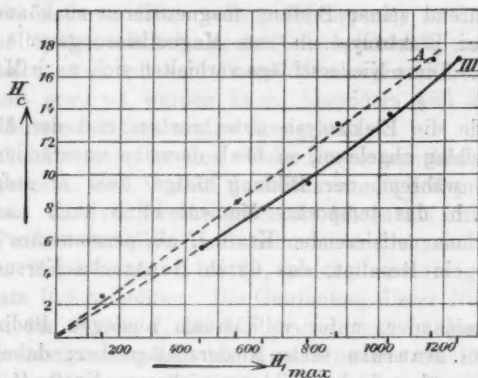


Fig. 14.

Wenn aber Stab *A* tatsächlich magnetisch härter ist als Stab III, so wäre zu erwarten, daß bei diesem das Maximum der Permeabilität früher, d. h. bei einer kleineren magnetisierenden Kraft  $H$  auftritt, als bei jenem. Diese Erwartung bestätigt sich, denn es ist:

für Stab III:  $K_{\text{max.}} = 18,3$  bei  $H = 25,0$

„ „ *A*:  $K_{\text{max.}} = 18,4$  „  $H = 33,0$ .

Das Verhalten des im magnetischen Feld gewonnenen elektrolytischen Eisens.

Es waren, wie in der Einleitung angedeutet wurde, die einschlägigen Arbeiten von Beetz, die mich zu den nun folgenden Versuchen anregten. Nachforschungen, die ich nachträglich in der Literatur anstellte, ergaben, daß über diesen Gegenstand schon gearbeitet worden ist. Es hat C. Maurain<sup>1)</sup> hierüber einige Resultate veröffentlicht, die zunächst besprochen werden sollen.

Maurain elektrolysierte zur Gewinnung von Eisenniederschlägen eine Lösung von Ferroammoniumoxalat, wobei die Elektroden bestanden aus:

Kathode: Messingdraht von 50 cm Länge und 4 mm Dicke.

Anode: Platinspirale.

Flüssigkeit und Elektroden waren in einem zylindrischen Glasgefäß untergebracht. Dieses wurde, um den Niederschlag schon während seiner Bildung magnetisieren zu können, vor Beginn der Elektrolyse in eine Magnetisierungsspule hineingeschoben. Diese Niederschläge verhielten sich nach Maurain wie folgt:

Wurde die Elektrolyse unterbrochen und der Magnetometerausschlag abgelesen, so blieb derselbe unverändert, auch wenn das während der Bildung tätige Feld  $H$  aufgehoben wurde, d. h. das temporäre Moment blieb auch nach Aufhören der magnetisierenden Kraft  $H$  als permanentes Moment bestehen, ein Resultat, das durch Beetzsche Versuche bestätigt ist.

Nacheinander, unter vollkommen analogen Bedingungen stellte nun Maurain sechs Niederschläge her; dabei wurde einzig die während der Bildung wirksame Kraft  $H$  variiert. Er fand für die remanenten Momente (stimmen überein mit den temporären) der Stäbe folgende Resultate:

$H = 0,67$	$M_1 = 33,6$
1,30	43,8
1,72	51,0
2,70	119,0
5,70	124,0
10,60	167,0

1) Ch. Maurain, Compt. rend. p. 410. 1900.



welches Ergebnis die Kurve (Fig. 15) liefert:

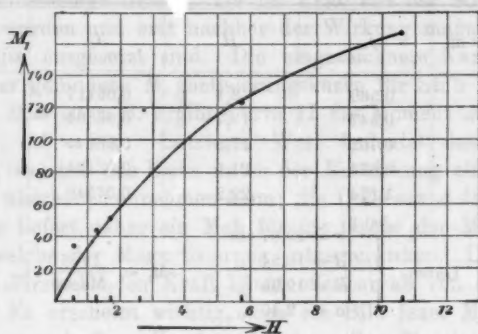


Fig. 15.

Da nur vier Punkte der Kurve in Betracht fallen können (die zwei anderen fallen vollständig heraus), so dürfte dieser Verlauf der Momente keine große Sicherheit bieten, und Maurain gibt selbst zu, daß von diesen Messungen keine große Genauigkeit erwartet werden kann, besonders weil die Eichung seines Magnetometers unzuverlässig war.

Ich habe nun, da eine solche Kurve mancherlei Interesse hat, versucht, den Verlauf derselben womöglich präziser festzustellen. Zu dem Zwecke erachtete ich es als unumgänglich, viele Punkte derselben aufzunehmen und es sind die Stäbe mit der Bezeichnung 1 bis 10, welche mir die gewünschten Resultate liefern sollten. Die Gewinnung dieser Niederschläge ist eine den Stäben I, II, III analoge und ist demnach auch in Übereinstimmung mit der Maurainschen Anordnung.

Die gewonnenen Resultate sind in folgender Tabelle enthalten:

Bezeichnung	$i_m$	$H$	$i_e$	$M_1$
1	0	0,2	0,01132*	145
2	0,0455*	1,2	0,03124	460
3	0,0853	2,3	0,04748	658
4	0,1504	3,9	0,05834	800
5	0,260	6,6	0,06615	875

## Fortsetzung der Tabelle.

Bezeichnung	$i_m$	$H$	$i_c$	$M_1$
6	0,360	9,1	0,06117	904
7	0,547	13,7	0,06564	920
8	0,702	17,5	0,06641	940
9	0,873	21,7	0,06131	963
10	1,174	29,2	0,07548	982

$$\text{Daten: } \begin{cases} r = 29,67 \text{ cm} \\ l = 13,54 \text{ „} \\ R = 19,95 \text{ „} \\ a = 2,40 \text{ „} \end{cases} \quad M_1 = \frac{1978}{\text{Masse}} \cdot i_c.$$

Die Momente  $M_1$  in Funktion von  $H$  aufgetragen, ergeben die Kurve Fig. 16:

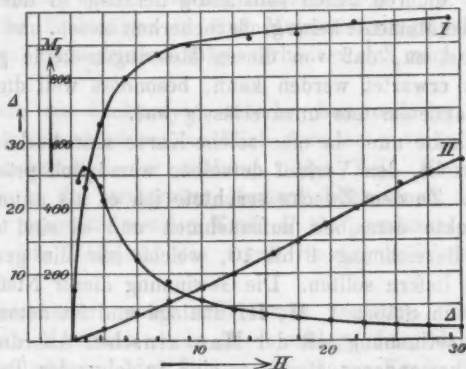


Fig. 16.

Wir gewinnen damit das Resultat, daß die Momente mit wachsender, während der Bildung der Niederschläge tätigen Kraft  $H$  stetig zunehmen. Die Maurainschen Werte sind so bedeutend kleiner als die obigen, daß die Vermutung nahe liegt, die Maurainschen Ziffern seien nur Relativwerte.

Vom Gesichtspunkt der Theorie des Magnetismus aus betrachtet erscheint es wichtig, die Kurve I zu vergleichen mit

einer gewöhnlichen Magnetisierungskurve II, welche identische Eisenniederschläge liefern, die im Feld von der Stärke Null gebildet wurden und erst nachher der Wirkung magnetisierender Kräfte ausgesetzt sind. Die eingezeichnete Kurve II ist die früher gefundene Magnetisierungskurve für Stab III.

Bei  $H = 10$  z. B. ergibt Kurve II das Moment  $M_1 = 155$ , Kurve I:  $M_1 = 905$ . Letzterer Wert bedeutet das höchste Moment, welches das Eisen unter der Einwirkung einer Kraft  $H = 10$  überhaupt annehmen kann; die Differenz  $\Delta$  der beiden Momente liefert daher ein Maß für die Größe der Molekularkräfte, welche der Magnetisierung entgegenwirken. Die Größe dieser widerstrebenden Kraft hängt offenbar ab von der Feldstärke. Es erscheint wichtig, sich ein Bild jener Molekularkräfte zu verschaffen. Zu dem Zwecke sollen für einige runde Werte von  $H$  die dazugehörigen Momente der Kurven I und II entnommen werden; die Verhältnisse  $\Delta$  dieser Momente, aufgetragen in Funktion der Feldstärke, werden das gewünschte Bild liefern. Man findet:

$H$	Kurve I $M_1$	Kurve II $M_1$	$\Delta$
0,5	240	10	24,0
1,0	400	15	28,6
1,5	520	21	25,0
2,0	620	27	23,0
2,5	670	33	20,3
5,0	840	70	12,0
7,5	886	110	8,0
10,0	903	158	5,7
12,5	920	205	4,5
15,0	930	252	3,6
17,5	943	310	3,0
20,0	953	360	2,6
22,5	968	410	2,3
25,0	980	460	2,1
27,5	986	503	1,9
30,0	990	540	1,8

Der Verlauf der Ziffern  $\Delta$  beweist, daß die der Magnetisierung widerstrebenden Molekularkräfte sich mit der Kraft  $H$  stark verändern. Es ist bemerkenswert, daß ihre Abhängigkeit durch eine Kurvenform gegeben ist, welche an den Verlauf der Permeabilität der magnetischen Metalle erinnert.

Dieses Resultat dürfte in seinen Konsequenzen geeignet sein, einiges Licht zu bringen in das Wesen der molekularen Kraftwirkungen und auf die inneren Vorgänge bei der Magnetisierung. Auch die so charakteristische Form der Magnetisierungskurven dürfte hierin ihre innere Begründung haben.

(Eingegangen 3. Januar 1908.)



**8. Berichtigung zu dem Aufsätze:  
 „Untersuchungen über Entladungserscheinungen  
 in Geisslerschen Röhren“<sup>1)</sup>;  
 von Eduard Riecke.**

Die in dem angeführten Aufsätze enthaltenen Druckangaben beruhen auf Messungen, welche nach der von Hagen angegebenen Methode ausgeführt waren. Bei einer Nachmessung der Dimensionen der Pumpe stellte sich heraus, daß bei den früheren Messungen ein Fehler begangen worden war. Infolge davon ist an den Werten des Druckes eine Korrektur anzubringen von verschiedener Größe, je nachdem bei der Kompression das Vorvakuum, oder die Auslaßkapillare benützt worden war. In dem letzteren Falle sind die Druckangaben mit dem Faktor 1,085 zu multiplizieren, um den Druck auf Millimeter Quecksilber zu reduzieren. Bei den Druckmessungen, welche in dem genannten Aufsätze benützt sind, wurde stets bis in die Ausflußkapillare komprimiert, zur Reduktion der Druckangaben ist also die Zahl 1,085 zu benützen.

Die Korrektur ist von besonderer Bedeutung mit Bezug auf zwei Formeln,\* die ich aus den Beobachtungen abgeleitet hatte; die eine bezieht sich auf den Abstand der inneren Grenze des Kathodenglimmlichtes von der Kathodenfläche, die andere auf die Dicke der leuchtenden Kathodenschicht.

Bezeichnet man den Druck in Millimeter Quecksilber mit  $p$ , den Minimalabstand zwischen der inneren Grenze des Glimmlichtes und der Kathodenfläche in Zentimeter mit  $g$ , so ergibt sich die neue Formel:

$$pg = 0,167.$$

Die folgende Tabelle enthält die beobachteten Wertpaare von  $p$  und  $g$ , sowie die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von  $g$ ,  $\delta = g_{\text{beob.}} - g_{\text{ber.}}$

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 16. p. 282. 1905.

$p$	$g$	$\delta$	$p$	$g$	$\delta$
0,250	0,64	-0,03	0,260	0,63	-0,01
0,241	0,70	+0,01	0,215	0,79	+0,01
0,126	1,32	+0,01	0,179	0,93	0,00
0,122	1,39	+0,03	0,159	1,04	-0,01
0,116	1,47	+0,03	0,146	1,18	+0,03
0,108	1,51	-0,03	0,132	1,22	-0,04
0,104	1,60	0,00	0,130	1,30	+0,02
0,098	1,71	+0,02	0,123	1,32	-0,03
0,092	1,82	+0,01	0,121	1,39	+0,02
0,086	1,96	+0,01	0,117	1,42	0,00
0,080	2,04	-0,04	0,113	1,47	-0,01
0,075	2,23	0,00	0,108	1,57	+0,03
0,069	2,41	+0,01	0,094	1,78	+0,01
0,066	2,53	+0,01			

Die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten gehen kaum über die Beobachtungsfehler hinaus. Bei einem Drucke von 1 mm ergibt sich aus meiner Formel für  $g$  der Wert 0,167 cm; aus der von Ebert aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Formel ergibt sich bei demselben Drucke für die Dicke des Kathodendunkelraumes der Wert 0,211 cm. Die Gründe für diese Abweichung habe ich schon früher besprochen; der Hauptgrund dürfte darin liegen, daß die Beobachtungen von Ebert sich auf eine unbeeinflusste Kathode beziehen, während bei meinen Beobachtungen der Rand der Kathode von der Wand der Glasröhre nur durch einen Zwischenraum von 0,33 mm getrennt war.

Die zweite der in der angeführten Arbeit enthaltenen Formeln gibt den Zusammenhang zwischen dem Drucke und der Dicke  $\delta$  der leuchtenden Kathodenschichte. Nach Ausführung der Druckkorrektur wird die Gleichung:

$$\delta \cdot p^{0,902} = 0,133.$$

(Eingegangen 24. Januar 1908.)



Fig. 24. ←

**Lochunterbrecher.**

Die Aufnahme ist im Augenblick des Stromschlusses gemacht. Die erste Unterbrechung verbraucht mehr Energie als die folgenden, da sich in der Nähe des Loches erst eine höhere Temperatur einstellen muß.

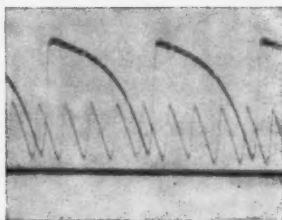


Fig. 25. ←

Die Stromkurven des Loch- und Stiftunterbrechers unter gleichen Bedingungen (die schnelleren Unterbrechungen rühren vom Stiftunterbrecher her).

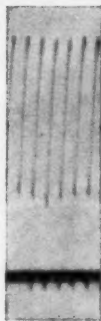


Fig. 34. →

**Stiftunterbrecher.**

Bei sehr schnellen Unterbrechungen (ca. 700 pro Sek.) geht die Stromkurve nicht auf die Nulllinie herab; die Gasblase bedeckt nur einen Teil des Platinstiftes.

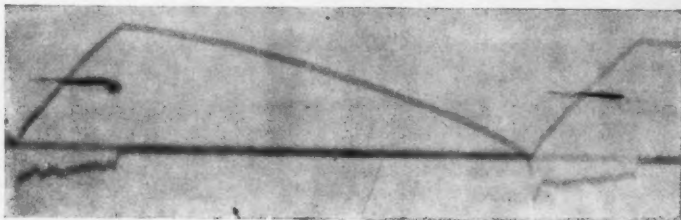


Fig. 40. ←

**Stiftunterbrecher.**

Unter denselben Versuchsbedingungen aufgenommen wie Fig. 37, nur ist die Oszillographentrommel, die das Negativpapier trug, schneller gedreht. Wichtig ist hier, wie auf Fig. 37, die starke Leuchterscheinung.

*Stromkurve oberhalb der Nulllinie. Spannungskurve unterhalb der Nulllinie. Die*

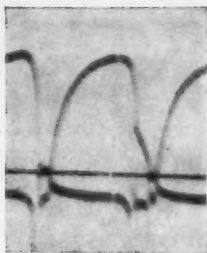


Fig. 35. →

## Lochunterbrecher.

Als „aktive Elektrode“ Kupfer und als Elektrolyt  $\text{CuSO}_4$ . „Aktive Elektrode“ negativ. Bei der Stromunterbrechung tritt zwischen der „aktiven Elektrode“ und der Flüssigkeit ein Lichtbogen auf.

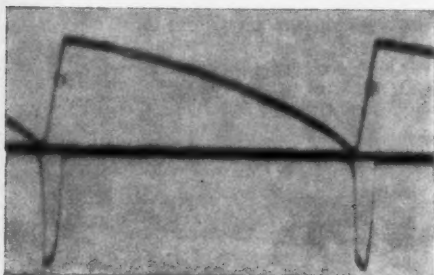


Fig. 36. ←

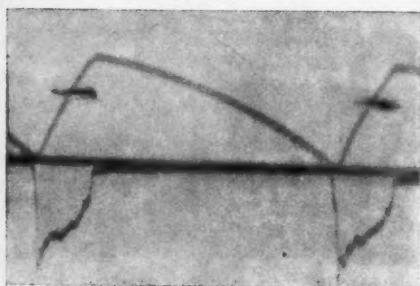


Fig. 37. ←

## Stiftunterbrecher.

Figg. 36 u. 37 sind Vergleichsaufnahmen, die erhalten wurden, wenn die „aktive Elektrode“ positiv, und wenn sie negativ war. Außer den Strom- und Spannungskurven sind die an der aktiven Elektrode auftretenden Leuchterscheinungen mitregistriert.

der Nulllinie. Die Kurven werden im Sinne des Pfeiles durchlaufen.

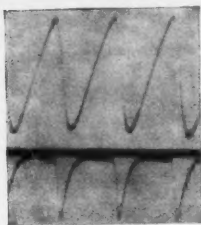
ndewig.



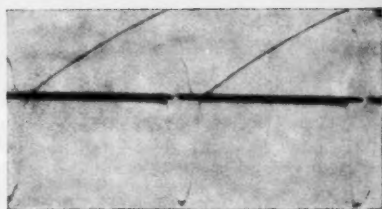
die  
ode“  
den  
der  
chei-

en.





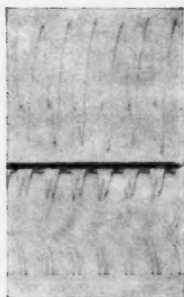
No. 510.



No. 514.



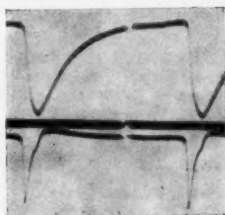
No. 511.



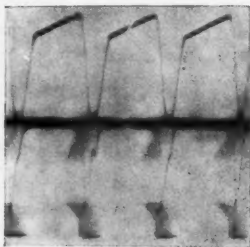
No. 525.



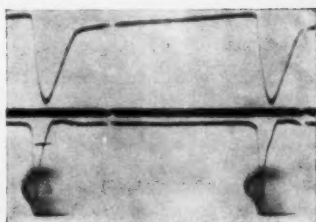
No. 512.



No. 534.



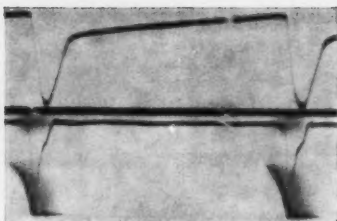
No. 513.



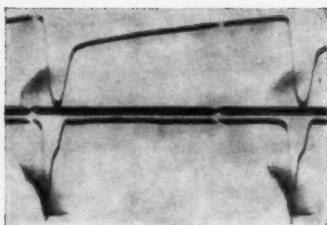
No. 535.

*Stromkurve oberhalb der Nulllinie. Spannungskurve unterhalb der Nulllinie.*

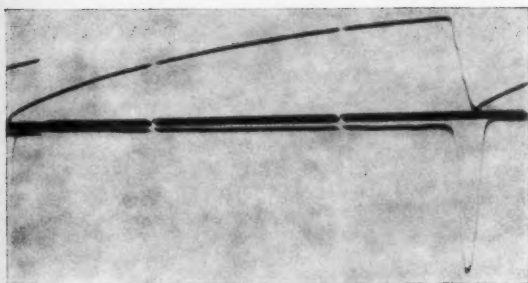
P. Ludewig.



No. 536.



No. 537.



No. 538.

**Stiftunterbrecher.**

Nr. 510—514. Änderung der Belastung des Sekundärkreises (vgl. Tab. 37, p. 503).

**Lochunterbrecher.**

Nr. 534—538. Änderung der Belastung im Sekundärkreise (vgl. Tab. 34, p. 502).

*Die Kurven werden von links nach rechts durchlaufen.*

